RELATIVIDAD Y ELECTROMAGNETISMO.

Autor: DIEGO SÁEZ SCHWEDT.
Fecha: 2019…2026.

DISCLAIMER:
Este documento corresponde a una versión preliminar de trabajo académico.
No se sometió a ningún proceso de revisión por pares (“peer review”) ni a proceso editorial formal.
Puede contener errores, omisiones, secciones incompletas y desarrollos provisionales.
Se publica como archivo de preservación intelectual y registro de trabajo, no como versión final certificada.

CONTENIDO.

PARTE-1: (este archivo Relativ1)

SISTEMAS DE REFERENCIA
LEYES FÍSICAS
RELATIVIDAD ESPECIAL, INTRODUCCIÓN
TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ
MECÁNICA RELATIVISTA Y ELECTROMAGNETISMO

PARTE-2: (otro archivo Relativ2)

RELATIVIDAD GENERAL, INTRODUCCIÓN
CURVATURA DEL ESPACIO-TIEMPO
HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS
FÍSICA EN ESPACIOS CURVOS

PARTE-3: (otro archivo Relativ3)

TENSOR DE ENERGÍA-IMPULSO
ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN
SOLUCIONES EXACTAS
TEMAS ADICIONALES
ÍNDICE DE AUTORES Y DICCIONARIO
EJERCICIOS RESUELTOS
ANEXOS
BIBLIOGRAFÍA

ÍNDICE GENERAL.

1. **SISTEMAS DE REFERENCIA.**
   - 1.1 Planteo de la obra
   - 1.2 Marco de trabajo
   - 1.3 Sistemas de coordenadas
     - 1.3.1 Coordenadas curvilíneas vs. rectangulares
     - 1.3.2 Escalado: pulgadas vs. centímetros
     - 1.3.3 Rotación de ejes
     - 1.3.4 Movimiento relativo
   - 1.4 Base de vectores
     - 1.4.1 Métrica cartesiana o pitagórica
     - 1.4.2 Otras métricas
     - 1.4.3 Cambio de coordenadas, matriz jacobiana
     - 1.4.4 Covarianza, contravarianza, invarianza
   - 1.5 La cuarta dimensión
     - 1.5.1 Cuadrivector tiempo-espacio
     - 1.5.2 Diferencial de línea invariante
2. **LEYES FÍSICAS**
   - 2.1 Cuadrivectores
     - 2.1.1 Cuadrivector potencia-fuerza
     - 2.1.2 Cuadrivector carga-corriente
     - 2.1.3 Cuadrivector de derivadas parciales
     - 2.1.4 Cuadrivector potencial
     - 2.1.5 Cuadrivector de onda
   - 2.2 Leyes físicas invariantes
     - 2.2.1 Conservación de la energía
     - 2.2.2 Ecuación de continuidad
     - 2.2.3 Condición de calibre Lorenz
     - 2.2.4 Ángulo de fase invariante
   - 2.3 Ruptura con la Física Clásica
     - 2.3.1 Transformación de fuerzas
     - 2.3.2 Lagrangeano de una partícula cargada
     - 2.3.3 Ecuación de ondas
     - 2.3.4 Velocidad de la luz
     - 2.3.5 El éter luminífero
     - 2.3.6 Anticipo métrico
3. **RELATIVIDAD ESPECIAL, INTRODUCCIÓN**
   - 3.1 Análisis de las rupturas
     - 3.1.1 Diferencia de fuerzas
     - 3.1.2 Cuadripotencial
     - 3.1.3 Ecuación de ondas
     - 3.1.4 Simetría espacio-tiempo
   - 3.2 Alteraciones electromagnéticas
     - 3.2.1 Fuerza de Lorentz
     - 3.2.2 Transformación de campos
     - 3.2.3 Ecuaciones de Maxwell
     - 3.2.4 Transformación de cargas y corrientes
     - 3.2.5 Transformación de potenciales
   - 3.3 Alteración del espacio-tiempo
     - 3.3.1 Conservación de la carga
     - 3.3.2 Lluvia en la carretera

3.3.3 ¿Tiempo relativo al observador?
3.4 Transformación de Lorentz
3.4.1 Inversión de las fórmulas
3.4.2 Carga puntual en movimiento uniforme
3.4.3 Postulados de la Relatividad Especial
4. TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ
4.1 Contracción de longitudes
4.1.1 Densidad de cargas en movimiento
4.2 Relatividad del tiempo
4.2.1 Dilatación temporal
4.2.2 Simultaneidad relativa
4.3 Revisión de cuadrivectores
4.3.1 Adición relativista de velocidades
4.3.2 Campos electromagnéticos
4.3.3 Transformación de fuerzas
4.4 Constancia de la velocidad de la luz.
4.4.1 Rayo de luz lineal
4.4.2 Frente de ondas esférico
4.4.3 ¿Velocidad límite 'c'?
4.5 Métrica y notación tensorial
4.5.1 Métrica de Minkowski
4.5.2 Formulación tensorial
4.5.3 Conservación de la carga eléctrica
4.5.4 Ondas armónicas planas
4.5.5 Condición de calibre "gauge" de Lorenz
4.5.6 Trabajo y conservación de la energía
4.5.7 Ecuación de ondas
5. MECÁNICA RELATIVISTA Y ELECTROMAGNETISMO
5.1 Cuadrivector "velocidad propia"
5.1.1 Cuadrivelocidad de portadores de carga
5.2 Cantidad de movimiento relativista
5.2.1 Choque de bolas
5.2.2 Centro de masas
5.2.3 Diferencia de fuerzas entre Σ y Σ'
5.2.4 Anticipo de gravedad
5.3 Ecuación de Einstein $E=m.c^2$
5.3.1 Equivalencia masa-energía
5.3.2 Partículas
5.3.3 Fotones
5.3.4 Taquiones
5.3.5 Energía potencial
5.4 Principios variacionales, formulación lagrangeana
5.4.1 Partícula libre en reposo
5.4.2 Partícula libre en movimiento uniforme
5.4.3 Integral de acción
5.4.4 Formulación del Lagrangeano en τ
5.5 Fuerza de Lorentz relativista
5.5.1 Energía potencial electrostática
5.5.2 Potenciales eléctricos y magnéticos
5.5.3 Fuerzas electromagnéticas
5.6 Tensor de Campo Electromagnético

5.6.1 Versión covariante
5.6.2 Versión contravariante
5.6.3 Ecuación de ondas tensorial
5.6.4 Transformación tensorial
5.6.5 Invariante del tensor de campo
5.6.6 Identidad de Bianchi
5.6.7 Tensor de campo dual

6. RELATIVIDAD GENERAL, INTRODUCCIÓN

- 6.1 Principio de equivalencia
  - 6.1.1 Gravedad creada por masas móviles
  - 6.1.2 Equivalencia gravedad-acelearción
  - 6.1.3 Masa inercial y masa gravitatoria
- 6.2 Curvatura de la luz por gravedad
  - 6.2.1 Análisis por potenciales retardados
  - 6.2.2 Análisis por haz de fotones
- 6.3 Efecto Doppler gravitatorio
  - 6.3.1 Análisis cuántico en base a fotones
  - 6.3.2 Análisis por potenciales retardados
  - 6.3.3 Análisis cinemático clásico
- 6.4 Sistema con aceleración uniforme
  - 6.4.1 Aceleración propia constante
  - 6.4.2 Fuerza constante
  - 6.4.3 Longitud propia
  - 6.4.4 Tiempo propio
  - 6.4.5 Atrapados en la zona oscura
- 6.5 Coordenadas de Rindler
  - 6.5.1 Lagrangeano de Rindler
  - 6.5.2 Maximización del tiempo propio ‘τ’
  - 6.5.3 Cuadri-aceleración
  - 6.5.4 Lagrangeano y principios variacionales
- 6.6 Estudio métrico de la gravedad
  - 6.6.1 Curvatura de luz: análisis por índice de refracción
  - 6.6.2 Análisis Doppler por métrica
  - 6.6.3 Diltación temporal
  - 6.6.4 Estación espacial rotatoria
  - 6.6.5 Propuesta métrica
- 6.7 Gravedad planetaria
  - 6.7.1 Perihelio de órbitas planetarias
  - 6.7.2 Posición aparente de estrellas remotas
  - 6.7.3 Velocidad de escape en un campo gravitatorio
  - 6.7.4 Agujeros negros
  - 6.7.5 Horizonte de sucesos y cono de luz
- 6.8 ¿Principio de Equivalencia?
  - 6.8.1 Caída libre colectiva
  - 6.8.2 Caída libre Rindler
  - 6.8.3 Fuerzas de marea

7. CURVATURA DEL ESPACIO-TIEMPO

- 7.1 Gravito-electromagnetismo
  - 7.1.1 Enfoque cualitativo
  - 7.1.2 Enfoque cuantitativo por campos
  - 7.1.3 Enfoque cuantitativo por métrica
  - 7.1.4 Limitaciones
- 7.2 Perturbación métrica espacial
  - 7.2.1 Perturbación por cambio de variable
  - 7.2.2 Análisis de fuerzas
  - 7.2.3 Métrica de Schwarzschild
  - 7.2.4 Coordenadas de Gullstrand-Painlevé
  - 7.2.5 Más allá del horizonte

7.3 Métrica y curvatura
7.3.1 Modelo bidimensional
7.3.2 Métrica variable en el tiempo
7.3.3 Principio de equivalencia “inverso”
7.3.4 Curvas geodésicas
7.3.5 Espaciotiempo *curvo* en Relatividad
7.3.6 Paraboloide de Flamm
7.4 Modelo mecánico de la gravedad
7.4.1 Fuerza gravitatoria sobre una masa ‘m’
7.4.2 Modelo de “colchón” de resortes
7.4.3 Propagación de perturbaciones
7.4.4 Métrica en el colchón
7.4.5 Curvatura de la luz
7.4.6 Generación de perturbaciones mediante masas ‘M’
7.4.7 Lecturas adicionales
8. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS
8.1 Sistemas de coordenadas
8.1.1 Coordenadas oblicuas
8.1.2 Métrica
8.1.3 Base dual de vectores
8.1.4 Tensor métrico dual
8.1.5 Subir y bajar índices
8.1.6 Coordenadas esféricas
8.1.7 Coordenadas esferoidales
8.1.8 Coordenadas hiperesféricas 4D
8.2 Derivada covariante
8.2.1 Divergencia en coordenadas cilíndricas
8.2.2 Divergencia en coordenadas curvilíneas
8.2.3 Curvas sobre superficies
8.2.4 Ecuación de fuerzas
8.2.5 Fuerzas gravitatorias
8.2.6 Ecuación geodésica
8.3 Símbolos de Christoffel
8.3.1 Método de las geodésicas
8.3.2 Método de los vectores base
8.3.3 Divergencia en coordenadas esféricas
8.4 Análisis tensorial
8.4.1 Tensor de momento de inercia
8.4.2 Tensor de momento cuadrupolar
8.4.3 Tensor de tensiones en un material
8.4.4 Componentes de un tensor
8.4.5 Gradiente de un vector
8.4.6 Derivada covariante de un tensor
8.4.7 Tensores de rango >2
8.5 Geometrías no euclideanas
8.5.1 Suma de ángulos de un triángulo
8.5.2 Longitud de una circunferencia
8.5.3 Deriva geodésica geomética
8.5.4 Deriva geodésica gravitatoria
8.5.5 Transporte paralelo
9. FÍSICA EN ESPACIOS CURVOS

9.1 Tensores de curvatura
9.1.1 Paraboloide elíptico
9.1.2 Transporte paralelo en el vértice
9.1.3 Tensor de Riemann
9.1.4 Riemann y transporte paralelo
9.1.5 Tensor de Ricci
9.1.6 Escalar de Ricci
9.2 Aplicaciones de geometría diferencial
9.2.1 Divergencia genérica
9.2.2 Tensor de Riemann y deriva geodésica
9.2.3 Tensor de Ricci y variación de volumen
9.2.4 Tensor de Ricci y materia
9.2.5 Curvatura de una cáscara esférica
9.3 Electromagnetismo en espacios curvos
9.3.1 Electromagnetismo en coordenadas cilíndricas
9.3.2 Espaciotiempo acelerado
9.3.3 Fuerza de Lorentz
9.3.4 Tensor de campo contravariante
9.3.5 Ecuaciones de Maxwell
9.3.6 Ecuación de ondas electromagnéticas
9.4 Principio de mínimo acople
9.4.1 Fuerza y aceleración
9.4.2 Derivada covariante del tensor métrico
9.4.3 Identidad de Bianchi
9.4.4 Simetrías del tensor de Riemann
9.5 Laplaciano relativista
9.5.1 Métrica de Rindler
9.5.2 Rindler linealizado
9.5.3 Schwarzschild
9.5.4 Gullstrand-Painlevé
9.6 Principio de covarianza
9.6.1 Límite del campo débil
9.6.2 Símbolos de Christoffel
9.6.3 Tensor de Riemann
9.6.4 Tensor de Ricci
9.6.5 Condición de calibre
9.6.6 Posible métrica de vacío

10. TENSOR DE ENERGÍA-IMPULSO

- 10.1 Propiedades básicas
  - 10.1.1 Definición de componentes
  - 10.1.2 Simetría
  - 10.1.3 Leyes de conservación
  - 10.1.4 Coordenadas curvilíneas
- 10.2 Fuentes de energía
  - 10.2.1 Polvo cósmico
  - 10.2.2 Fluido perfecto
  - 10.2.3 Materia compacta
  - 10.2.4 Derivada covariante
- 10.3 Campo electromagnético
  - 10.3.1 Tensor de tensiones de Maxwell
  - 10.3.2 Energía y momento del campo electromagnético
  - 10.3.3 Expresión tensorial del $T^{\alpha\beta}$ electromagnético
  - 10.3.4 Gas de fotones
  - 10.3.5 Traza del tensor de energía-impulso
- 10.4 Perturbaciones métricas
  - 10.4.1 Presiones
  - 10.4.2 Análisis de fuerzas
  - 10.4.3 Fuerza relativista
  - 10.4.4 Análisis semi-clásico
  - 10.4.5 Flujos másicos
- 10.5 Masa gravitatoria activa y pasiva
  - 10.5.1 Esfera en rotación
  - 10.5.2 Gravitomagnetismo 2.0
- 10.6 Ecuación de campo débil
  - 10.6.1 Traza del tensor de energía-impulso
  - 10.6.2 Calibres gravitatorios “gauge”
  - 10.6.3 Rindler cuadrático y lineal
  - 10.6.4 Calibre inercial y calibre isócrono
  - 10.6.5 Gullstrand-Painlevé y Schwarzschild
  - 10.6.6 Calibre Coulomb y calibre isotrópico
  - 10.6.7 Mezcla de efectos
- 10.7 Métrica de traza reversada
  - 10.7.1 Masas móviles
  - 10.7.2 Masas en reposo
  - 10.7.3 Efectos gravitomagnéticos
  - 10.7.4 Efectos de la presión
  - 10.7.5 Ecuación de campo tensorial

11. ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN

- 11.1 Tensores de Riemann y Ricci
  - 11.1.1 Rotación espacial
  - 11.1.2 Coordenadas de Rindler
  - 11.1.3 Sistema en rotación uniforme
  - 11.1.4 Coordenadas de Gullstrand-Painlevé
  - 11.1.5 Coordenadas de Schwarzschild
- 11.2 Ecuaciones de campo
  - 11.2.1 Unión entre el vacío y la materia
  - 11.2.2 Divergencia del tensor de Ricci
  - 11.2.3 Ecuación de traza reversada

11.2.4 Conservación de la energía
11.2.5 Transformación de calibre “gauge”
11.2.6 Divergencia covariante del tensor de Ricci
11.3 Formulación lagrangeana
11.3.1 Lagrangeano electromagnético clásico
11.3.2 Lagrangeano electromagnético, Relatividad Especial
11.3.3 Lagrangeano electromagnético, Relatividad General
11.3.4 Lagrangeano gravitatorio, introducción clásica
11.3.5 Lagrangeano gravitatorio, acción de Hilbert
11.4 Ecuaciones variacionales
11.4.1 Variación del determinante ‘g’
11.4.2 Variación del escalar de Ricci
11.4.3 Variación del tensor de Riemann
11.4.4 Variación del tensor de Ricci
11.4.5 Variación de la acción
11.4.6 Acción de la materia, ejemplos
11.4.7 Variación de los Christoffel
11.5 Primeras soluciones exactas
11.5.1 Solución de vacío
11.5.2 Astro en formación
11.5.3 Polvo en expansión
11.5.4 Introducción a la Cosmología
12. SOLUCIONES EXACTAS
12.1 Solución de vacío de Schwarzschild
12.1.1 Matrices de Christoffel
12.1.2 Tensor de Riemann
12.1.3 Tensor de Ricci
12.1.4 Coordenadas isotrópicas
12.1.5 Otras coordenadas
12.2 Solución de Reissner-Norström
12.2.1 Tensor de traza nula
12.2.2 Ecuación de Einstein alternativa
12.2.3 Ecuaciones de Maxwell-Einstein
12.2.4 Ecuaciones de campo
12.2.5 Métrica completa
12.3 Solución interna de Schwarzschild
12.3.1 Símbolos de Christoffel
12.3.2 Tensor de Riemann
12.3.3 Tensor de Ricci
12.3.4 Tensor energía-impulso con presiones
12.3.5 Ecuaciones de campo
12.3.6 Solución métrica radial
12.3.7 Solución métrica temporal
12.4 Solución de Kerr
12.4.1 Perturbación radial
12.4.2 Aditividad y linealidad
12.4.3 Coordenadas esferoidales
12.4.4 Desarrollo multipolar
12.4.5 Cambio de variable ortogonal t, φ
12.4.6 Ansatz
12.4.7 Riemann, Ricci, solución final

12.5 Túnel de espacio-tiempo
12.6 Otras soluciones
13. TEMAS ADICIONALES
13.1 Paradojas de la Relatividad Especial
13.1.1 Paradoja de los gemelos
13.1.2 Paradoja de la jabalina y el granero
13.1.3 Paradoja de la nave de Bell
13.1.4 Rigidez de Born
13.1.5 Paradoja de Ehrenfest
13.2 Cosmología
13.2.1 Estabilidad de la gravitación
13.2.2 Constante cosmológica de Einstein Λ
13.2.3 Principio de Mach
13.2.4 Big Bang, Universo en expansión
13.2.5 Ondas gravitatorias
13.3 Fronteras del mundo
13.3.1 Universos adentro de un punto
13.3.2 Efectos cuánticos
13.3.3 Conquista del espacio
13.3.4 Viajes en el tiempo
13.3.5 Teletransporte
13.3.6 Antigravedad, masa negativa
13.4 Lecturas adicionales
14. ÍNDICE DE AUTORES Y DICCIONARIO.
15. EJERCICIOS RESUELTOS.
16. ANEXOS
Cálculo numérico, códigos fuente.
Lecturas de interés.
BIBLIOGRAFÍA.

DEDICADO A:

Mi padres: Emma Schwedt, 1943..2017. Hugo Sáez, 1939..2025.

RECONOCIMIENTO:

Mis Profesores:

- 1990 a 1991. Prof. Mario Guerra, Colegio Alemán, Montevideo, Uruguay.
- 1994 a 1995: Prof. Daniel Marta, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay.

Mis libros:

[1] J.R. Reitz, F.J. Milford and R.W. Christy, Fundamentos de la Teoría Electromagnética (Addison-Wesley, Reading, 1979), 3rd ed

[2] Lev D. Landau, Evgeny M. Lifshitz, "Course on Theoretical Physics Vol. 2: The Classical Theory of Fields", Butterworth-Heinemann (1975), ISBN 978-0-750-62768-9.

[3] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, "Gravitation", W. H. Freeman and Co. (1973), ISBN 978-0-7167-0344-0.

Mis profesores "virtuales" (*estaría bueno conocerlos en persona*):

https://www.youtube.com/watch?v=XFV2feKDK9E [Special Relativity Brian Greene]
https://www.youtube.com/playlist?list=PLpGHT1n4-mAvcXwzOIz3dHnGZaQP1LEib [Leonard Susskind, Stanford University]
https://www.youtube.com/watch?v=353lEB63iyg [Sean Carroll]
https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March01/Carroll3/Carroll7.html [Sean Carroll, California Institute of Technology]
https://www.youtube.com/watch?v=0Vb4B8mN-Ek [Alex Flournoy]
https://www.youtube.com/watch?v=9WbrujNXSw8 [DrPhysicsA]
https://av.tib.eu/media/19932 [Jörn Loviscach]
The Feynman Lectures on Physics Vol. I Ch. 15: The Special Theory of Relativity[Feynman]
http://www.ugr.es/~bjanssen/text/BertJanssen-RelatividadGeneral.pdf [Bert Janssen, Universidad de Granada]
http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf [Matthias Blau]
http://wwwhome.lorentz.leidenuniv.nl/~henk/grh.pdf [Henk W.J. Blöte]
http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.com/ [Armando Martínez Téllez]
http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/to2009/geomiv0607/apgeom3.pdf [Universidad Autónoma de Madrid]
https://www.youtube.com/watch?v=T2JrJupa2Og [https://www.youtube.com/@XylyXylyX]
http://farside.ph.utexas.edu/teaching/em/lectures/node128.html [Richard Fitzpatrick, University of Texas]
http://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newton/node109.html [Richard Fitzpatrick, University of Texas]
http://ion.uwinnipeg.ca/~vincent/4500.6-001/Cosmology/Interior%20Solution.htm [University of Winnipeg, Canada]

https://www.kth.se/social/files/58233621f276544d5a722051/rel.pdf [Jouko Mickelsson, Tommy Ohlsson and H˚akan Snellman]
https://arxiv.org/pdf/1502.00149.pdf [Klaus Kassner, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Germany]
https://www.youtube.com/watch?v=v_z5hGspgTM [Anthony Zee, The Royal Institution]
https://www.researchgate.net/publication/238984245_The_Meaning_of_Einstein's_Equation [John Baez, Emory Bunn]
https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/lib/BaezEinsteinEqn.pdf [John Baez]
https://math.ucr.edu/home/baez/einstein/einstein.html [John Baez]
https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0401099.pdf [Lee C. Loveridge]
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Einstein_ether/ [Albert Einstein]
https://cds.cern.ch/record/340032/files/9712019.pdf [CERN, **C**onseil **E**uropéen pour la **R**echerche **N**ucléaire]
http://gfm.cii.fc.ul.pt/events/lecture_series/general_relativity/gfm-general_relativity-lecture4.pdf [Marko Vojinovic´]
https://www.bjp-bg.com/papers/bjp2018_2_180-202.pdf [E.I. Guendelman, A. Rabinowitz, A.P. Banik]
https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_19/papers17/carson.pdf [Carson, University of Washington]
https://www2.physics.ox.ac.uk/sites/default/files/2012-09-20/gr_b5_pdf_20413.pdf [Oxford University]
http://youtube.com/watch?v=OIjLUzS6SQA [Scott Hughes, M.I.T OpenCourseWare]
http://www.thespectrumofriemannium.com/2013/05/24/log105-einsteins-equations/ [The Spectrum Of Riemannium]
https://www.fis.unam.mx/~max/mecanica/b_Schutz.pdf [Bernard Schutz, Universidad Nacional Autónoma de México]

https://arxiv.org/ftp/physics/papers/0110/0110007.pdf [Charles Francis]
https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0311030.pdf [Bahram Mashhoom]

https://www.researchgate.net/publication/344433659_Approach_to_the_Schwarzschild_Metric_with_SL2R_Group_Decomposition [Alex Kritov]
https://www.nbi.ku.dk/bibliotek/noter-og-undervisningsmateriale-i-fysik/general-relativity-and-cosmology---a-personal-outline/General_relativity_and_cosmology_08_03_2020.pdf [Ole Witt-Hansen]
https://www.researchgate.net/publication/332868902_Apuntes_de_Relatividad_General [Jaime Román-Garza]
https://warwick.ac.uk/study/csde/gsp/eportfolio/directory/pg/live/marmaf/personal/tesis_ros.pdf [Author]
http://www.ifm.umich.mx/~sarbach/teaching/maestria/rg18/RG.pdf [Universidad Michoacana, México]
https://www.youtube.com/watch?v=feBT0Anpg4A [Caltech, Lorentz Transformation]
https://www.youtube.com/watch?v=pHfFSQ6pLGU [Prof. Shankar, Yale Courses]
http://einsteinrelativelyeasy.com/index.php/general-relativity [Cyril]
https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/notes/SRGRLect10_2007.pdf [Stanford University]
https://www.researchgate.net/profile/Friedrich_Hehl/publication/272625576_Schwarzschild_and_Kerr_Solutions_of_Einstein's_Field_Equation_--_an_introduction/links/5d0b678ba6fdcc35c15c4690/Schwarzschild-and-Kerr-Solutions-of-Einsteins-Field-Equation--an-introduction.pdf [Christian Heinicke, and Friedrich W. Hehl]
https://galileoandeinstein.phys.virginia.edu/lectures [University of Virginia]
https://javierrubioblog.files.wordpress.com/2015/12/chapter6.pdf [Javier Rubio]
https://www.physicsforums.com/threads/electromagnetic-field-tensor-in-curvilinear-coordinates.618984/ [PhysicsForums]
https://www.researchgate.net/publication/232503689_A_Possible_Intuitive_Derivation_of_the_Kerr_Metric_in_Orthogonal_FormBased_On_Ellipsoidal_Metric_Ansatz [Branislav Nikolic, Milan Pantic]
https://www.naturelovesmath.com/wp-content/uploads/2017/01/General-Relativity-Loud-and-Clear.pdf [Colombano-Rut]
https://www.youtube.com/watch?v=ZCV73M3PcPQ [N.J. Wildberger, 2nd Postulate of S.R]
https://www.youtube.com/watch?v=tTuXKTRuIxs [Eddie Boyes]
https://www.youtube.com/watch?v=Cjh4HrIK2bA [Sergio Montañez]
https://av.tib.eu/media/19932 [Jörn Loviscach]
https://www.youtube.com/watch?v=rgE-NRR2Evc [Peter Kroll]
https://www.youtube.com/watch?v=W2lgURyfLfs [Físicas Exactas, UBA]
Failure of Galilean relativity /variance of Maxwell's equations under Galilean transformation[Suvajit]
https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_25.html [Feynman]
https://www.biografiasyvidas.com/

PRIMERA PARTE

1. SISTEMAS DE REFERENCIA.

Introducción:

Es común asociar a Albert Einstein con la Teoría de la Relatividad, pero lo cierto es que muchas ideas que dan base a esta teoría ya se conocían desde tiempo atrás.
Una de las bases principales es el llamado Principio de Relatividad, que sostiene que las leyes físicas deberían tener la misma forma independientemente del sistema de referencia que se utiliza para describir las magnitudes. Esta idea funcionaba bien para la Mecánica y ya se manejaba desde tiempos de Newton y Galileo Galilei.
En el siglo XIX hubo avances en el Electromagnetismo y en la descripción de la luz como una onda electromagnética, y fue quedando de manifiesto que las ecuaciones de esta rama de la Física *no resultaban invariantes al pasar de un sistema de referencia* a otro en movimiento relativo: al intentar la operación aparecían términos parásitos dependientes del cociente v/c, siendo 'c' la velocidad de la luz y 'v' la velocidad relativa entre los sistemas de referencia. El mérito de Einstein y de otros científicos de su época fue ajustar las fórmulas físicas de manera que mantuvieran la invariancia al cambiar de sistema de referencia, para así poder extender hacia el resto de la Física la Relatividad de Galileo.

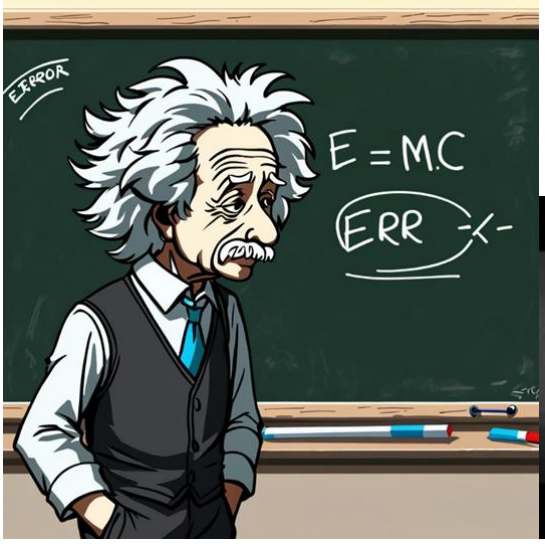
1.1 Planteo de la obra:

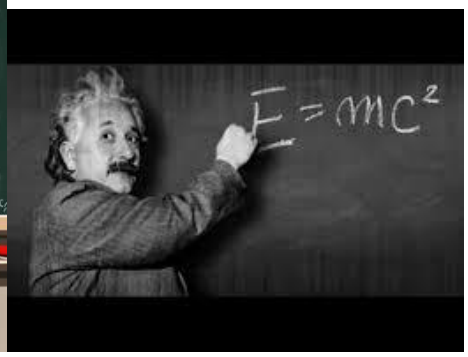
En este trabajo intentaremos llegar a las fórmulas de la Relatividad siguiendo procesos mentales similares a los que pudieron seguir los científicos contemporáneos de Einstein de fines del siglo XIX y principios del siglo XX. La velocidad de la luz es protagónica en este estudio, y debido al carácter electromagnético de la luz comprobaremos que en muchas ocasiones es útil recurrir a los conceptos del Electromagnetismo. Por eso incluimos a esta disciplina en el título del trabajo Relatividad y Electromagnetismo.
Pensamos dirigirnos a un público formado mayormente por estudiantes universitarios o profesionales de carreras en el área de la Ingeniería, que tuvieron ya algunos semestres sobre Análisis y Álgebra, Cálculo Vectorial, Física y Electromagnetismo.
Otros lectores también están invitados a seguir las páginas. Si por momentos las fórmulas matemáticas causan alguna incomodidad, pedimos disculpas y sugerimos concentrar la atención en los conceptos y en los resultados más que en los cálculos.

1.2 Marco de trabajo:

El enfoque que seguimos es gradual, se parte de conceptos más simples y se va aumentando la complejidad en forma progresiva. Esto significa que muchas veces vamos a presentar *ecuaciones incorrectas*. En el capítulo en que son presentadas, y con los conocimientos expuestos hasta ese momento, es probable que el resultado parezca convincente y que la incorrección no se note; quedará en evidencia más adelante cuando ampliemos los desarrollos.

En varias publicaciones sobre esta área de la Física se miden las magnitudes en un sistema de unidades llamado "unidades geométricas", donde se cumple c=1 y G=1 ('c' es la velocidad de la luz en el vacío y 'G' es la constante de gravitación universal). La ventaja innegable de esa elección es que muchas ecuaciones físicas quedan expresadas en forma más compacta: al ser c=1, factores como $(1–v^2/c^2)$ pueden abreviarse como $1–v^2$, y al ser G=1 el factor $(8\pi.G/c^4)$ se transforma en 8π.
En nuestro trabajo no seguiremos ese enfoque sino que conservaremos los valores del Sistema Internacional de Unidades donde vale c~299792km/s y $G\sim6.674*10^{-11}m^3/kg/s^2$. Aunque arrastremos muchos factores 'c' preferimos mantenerlos como forma de mostrar la importancia conceptual de esta velocidad límite; consideramos que ocultar los factores 'c' está bien para quien ya avanzó lo suficiente en Teoría de la Relatividad y ya conoce la importancia de esta constante, pero no para nosotros que recién la estamos deduciendo.
También vemos otras ventajas en el hecho de mantener los factores 'c'. Por ejemplo, si en algún momento nos aparece una energía igual a m.c, sabemos que hay un error porque está faltando un factor de velocidad (energía cinética tiene unidades de masa por velocidad al cuadrado) →en tal caso revisamos los cálculos en busca de ese error, que probablemente repercutió en más de un término o factor.





Otra utilidad de los factores 'c' es que nos dan una idea numérica de cuándo estamos frente a magnitudes que son mucho mayores o mucho menores que otras y nos guía sobre cómo hacer aproximaciones. Por ejemplo, en el capítulo 6.4 nos encontramos con distancias $X=c^2/g$ muy superiores a la escala de nuestros experimentos ('g' es la gravedad terrestre).

En el capítulo 15 se presentan las soluciones de muchos de los ejercicios planteados.
Sugerimos consultar las soluciones solamente luego de haber intentado realizar el cálculo, para evacuar alguna duda o para buscar pistas en caso de estar trancados.

Símbolos físicos y matemáticos:
A quien ya haya consultado o tenga interés en consultar otras publicaciones sobre este tema (*algo que aconsejamos y alentamos*), advertimos que puede haber diferencias sutiles en algunas convenciones o notaciones matemáticas. Por tal razón incluimos en esta introducción un resumen de los símbolos utilizados en este documento.

Los vectores llevan flecha encima, como velocidad $\vec{v}$. La única excepción en este trabajo son un tipo de vectores presentados en el capítulo 8.1.3 llamados "vectores duales" $\tilde{E}^{\vec{\alpha}}$. Decidimos omitir la flecha porque "chocaría" contra el tilde ~ o contra el superíndice $^{\alpha}$.
Las componentes de un vector en cierta base las escribimos separadas por comas dentro de un paréntesis, por ejemplo: $\vec{r}$ = (x,y,z).

El producto vectorial lo expresamos con el símbolo de "cuña" (en inglés:"*wedge*"), por ejemplo $\vec{F}=\vec{J}\wedge\vec{B}$.
El producto escalar entre vectores se indica mediante un punto grueso a media altura, como en $\dot{W}=\vec{f}\cdot\vec{u}$.
Cuando el punto es fino y bajo simplemente significa un producto de números reales como $4.\pi.\epsilon_o$ o el producto de un escalar por un vector como $m.\vec{a}$.

En el contexto de las curvas sobre superficies, a partir de los capítulos 7,8 y 9, el punto encima de una coordenada significa derivación respecto a la longitud de arco: $\dot{y}=dy/ds$.
Salvo esa excepción, en la mayoría de los casos restantes el punto indica derivación temporal. El contexto intentará aclarar en cada caso si se deriva respecto a alguna coordenada temporal 't' ($\dot{x}=dx/dt$) o respecto al tiempo propio de la partícula o cuerpo analizado ($\dot{x}=dx/d\tau$).
La potencia mecánica la representamos con el símbolo $\dot{W}$, el punto ayuda a recordar que no se trata de trabajo (W=*work* en inglés) sino de trabajo por unidad de tiempo.

Respecto a las velocidades: tratamos de mantener la costumbre de usar la letra $\vec{u}$ para el movimiento de los cuerpos o partículas y la letra $\vec{v}$ para el desplazamiento de un sistema Σ' respecto a otro Σ.

Con los paréntesis triangulares <f(x)> nos referimos al valor medio de una función f(x), el intervalo en que se calcula ese valor medio será aclarado en cada situación. Si la función f(x) tiene carácter aleatorio, su valor medio puede interpretarse como valor esperado o media estadística.

$<\vec{A},\vec{B}>$: en este otro contexto los paréntesis triangulares encierran 2 argumentos separados por coma: aquí están simbolizando el resultado de aplicar una forma cuadrática, interpretable como la generalización del producto escalar asociado a cierta métrica.

Las matrices las representamos con su nombre entre corchetes [].
Por ejemplo, [Jac*].[g].[Jac] es el doble producto matricial del tensor métrico [g] con el jacobiano [Jac] y con el jacobiano traspuesto [Jac*]. Las componentes de un vector, cuando participan en operaciones matriciales como "*vector fila*" o "*vector columna*", también las colocamos dentro de corchetes.

Los productos matriciales los ordenamos de acuerdo con el criterio ilustrado en el artículo:
https://es.wikipedia.org/wiki/Multiplicaci%C3%B3n_de_matrices

```
            [ b11   b12  ]
            [ b21   b22  ]
[ a11 a12 ][ p11   p12  ]
[ a21 a22 ][ p21   p22  ]
```

Cuando las matrices tienen varias filas y varias columnas, consideramos que esta notación es útil porque los casilleros de la matriz producto se dibujan en donde se intersectan la fila de la matriz A con la columna de la matriz B, y es el producto escalar entre esa fila-A y esa columna-B el que define el valor del resultado.

∇ = operador "nabla" para gradiente ($\nabla\Phi$), divergencia ($\nabla\cdot\vec{E}$) o rotacional ($\nabla\wedge\vec{B}$).
∇^2 = operador laplaciano o divergencia del gradiente $\nabla^2\phi=\nabla\cdot(\nabla\phi)=(\nabla\cdot\nabla)\phi$. Notación alternativa=$\Delta$.
$\Box^2$ = operador de ondas d'Alembertiano $\nabla^2-1/c^2.\partial_t^2$. Notación alternativa=$\Box$.
Los símbolos están inspirados en el hecho de que el d'Alembertiano (dibujado con 4 líneas) es el equivalente cuadri-dimensional al laplaciano tri-dimensional (dibujado con 3 líneas).

En este trabajo utilizamos los exponentes '2' para recordar que son operadores de 2do orden que involucran derivadas segundas (siguiendo la fuente https://mathworld.wolfram.com/dAlembertian.html), aunque observamos que es más común la notación alternativa=□.

Otras aclaraciones:
A pesar de que el tiempo es "*la cuarta dimensión*" en Teoría de la Relatividad, le asignamos normalmente el índice '0' en lugar del '4'. Las coordenadas las numeramos {0=ct, 1=x, 2=y, 3=z}, {0=ct, 1=r, 2=θ, 3=φ}.
Muchas veces utilizamos una notación simplificada ∂_i para referirnos a la derivada parcial respecto a la coordenada i-ésima.
En la métrica de Minkowski existen dos formas de definir la signatura: (-,+,+,+) o (+,-,-,-); en este trabajo utilizamos signatura (–,+,+,+) a partir de la sección 4.4.1.
En el tensor de Riemann (9.1.3) elegimos un orden de derivación que no es el único posible; y luego al definir el tensor de Ricci elegimos una contracción que tampoco es la única posible. Todo esto puede repercutir luego en el signo de las ecuaciones de campo o de otras fórmulas.
En las publicaciones consultadas encontramos diferencias de factores '2' o ½ al momento de estudiar las analogías entre Gravedad y Electromagnetismo. Por ejemplo, la fuerza llamada "*gravitomagnética*" que experimenta una masa móvil aparece a veces como $\vec{F_{gm}}=4.m.\vec{u}\wedge\vec{B_g}$. En este artículo trabajamos con un factor '2' en lugar de '4' (capítulo 7.1); luego el valor de la fuerza nos queda igual porque introducimos otro factor '2' en la fórmula que genera los campos $\vec{B_g}$ a partir de masas móviles 'M' (capítulo 10.4.4).

1.3 Sistemas de coordenadas:

En la Física es habitual que las magnitudes vectoriales se expresen como ternas de números o coordenadas referidas a ciertos ejes. Ejemplos:

vector posición $\vec{r}$: (x,y,z) vector fuerza $\vec{f}$: (f_x,f_y,f_z)

La base de la Teoría de la Relatividad es llegar a formular las leyes físicas de una manera que permita conciliar y comparar los resultados que puedan obtener dos grupos de trabajo que llamaremos grupo Σ y grupo Σ'. La primera dificultad a la que nos enfrentamos es que las ternas de números por sí solas no aportan toda la información necesaria, como veremos en diferentes escenarios.

1.3.1 Escenario-1) Coordenadas curvilíneas:

Llamamos $\vec{R}$ al vector de coordenadas de posición,

$d\vec{R}$ al apartamiento infinitesimal entre dos puntos próximos.

El equipo de trabajo Σ utiliza coordenadas rectangulares: $d\vec{R}$: (dx, dy, dz)

El equipo de trabajo Σ′ utiliza coordenadas esféricas: $d\vec{R}'$: (dr,dθ,dφ)

El equipo de trabajo Σ′′ utiliza coordenadas cilíndricas: $d\vec{R}''$: (dr,dφ,dz)

Algunas coordenadas son distancias y otras son ángulos, está claro que con estas diferencias es complicado hacer comparaciones. Supongamos que para evitar dificultades nos ponemos de acuerdo en que todos vamos a manejar distancias y nadie va a utilizar ángulos.

1.3.2 Escenario-2) Escalado:

El equipo Σ utiliza centímetros, el equipo Σ′ describe todo en pulgadas.

Al realizar experimentos hidráulicos sobre diámetros de cañería necesarios para transportar ciertos caudales, registramos el siguiente diálogo entre los científicos:

Dr. Σ: -Nosotros utilizamos tubos de diámetro 3.

Dr. Σ′: - ¿Diámetro 3? ¡Qué exageración! ¡A nosotros nos alcanza y sobra con diámetro 2!

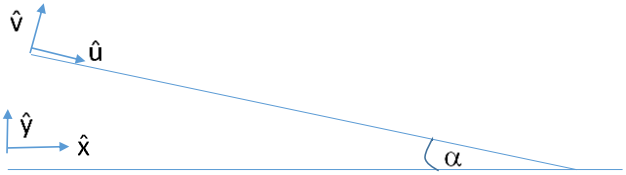
Resulta que el "diámetro 2" se refiere a pulgadas y equivale a casi 5cm. ¿Entonces quién es el exagerado? Para evitar malos entendidos, suponemos que llegamos al acuerdo de que todos vamos a utilizar la misma unidad de medida.

1.3.3 Escenario-3) Inclinación de ejes:

Dos grupos de científicos realizan experimentos de fricción y deslizamiento sobre un plano inclinado.

Los miembros del equipo Σ utilizan ejes $\{\vec{x},\vec{y}\}$ orientados según la gravedad y "*ven*" al plano inclinado.

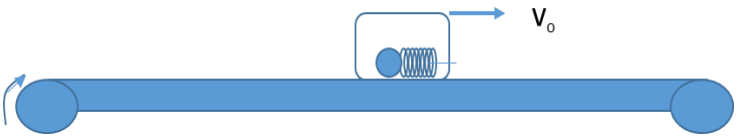
En el equipo Σ′ utilizan ejes $\{\vec{u},\vec{v}\}$ alineados con el plano y "*ven*" inclinado al vector de gravedad.



Ambas descripciones son consistentes y deberían conducir a los mismos resultados finales, aunque difieran lógicamente en algunos resultados parciales intermedios.
De cualquier manera, si insistimos con la política de restricción deberemos establecer como norma la obligatoriedad de orientar los ejes coordenados según la gravedad.

1.3.4 Escenario-4) Movimiento relativo:

A pesar de haber hecho ya 3 acuerdos o concesiones contra la libertad, siguen generándose discrepancias.
Realizamos experimentos con cajas, bolas, resortes…etc que se apoyan sobre una cinta transportadora moviéndose a velocidad constante $v_o^{\rightarrow}$.



Nos encontramos con que el grupo Σ utiliza el sistema de referencia del laboratorio en el cual la caja se mueve con velocidad $v_o^{\rightarrow}$ y todos los objetos dentro de ella también se mueven, a veces más rápido que v_o y a veces más lento.
Por el contrario, el equipo Σ′ elige un referencial solidario o comóvil con la cinta; se les simplifica la descripción del movimiento relativo a la cinta a costa de "ver" en movimiento a todos los instrumentos y objetos del laboratorio.

Abandonamos entonces la política de imponer condiciones.
Aceptamos que la comunidad de físicos debe poder conciliar los resultados que obtienen sus distintos miembros, y que no es admisible exigir restricciones que quiten la libertad de elegir diferentes sistemas de coordenadas acordes a cada situación. Planteamos los 4 ejemplos anteriores como forma de mostrar a través de un absurdo la inconveniencia que significarían esas restricciones.
Debe buscarse una formulación alternativa que contemple estos posibles sistemas de coordenadas.

1.4 Base de vectores.

Para poder operar con múltiples sistemas de coordenadas, un primer paso es que cada sistema informe los vectores base que está utilizando para su descripción.

Cuando anunciamos un desplazamiento (du,dv), anotamos en forma diferente $d\vec{S}$ con o sin corchetes:

$[d\vec{S}]=(du,dv)$ es el conjunto de componentes, variable según cada referencia Σ o Σ'.

$d\vec{S}=du.\vec{u} + dv.\vec{v}$ es el desplazamiento propiamente dicho.

La fórmula del $d\vec{S}$ da la indicación de avanzar:

- 'du' unidades según el vector base $\vec{u}$
- 'dv' unidades según el otro vector base $\vec{v}$.

→La posible ambigüedad de las diferentes inclinaciones de ejes del escenario-3 es perfectamente sorteada si cada sistema de referencia da a conocer sus vectores base: Σ={x̂,ŷ}, Σ'={û,v̂}.

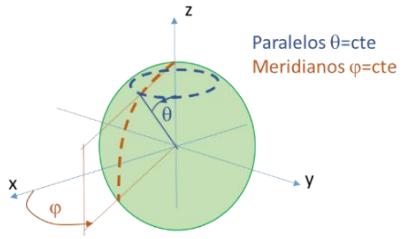
→El escenario-2 del escalado también queda resuelto de esta manera: los vectores base del sistema de pulgadas tienen mayor longitud que los vectores base de los centímetros. El factor es 2.54 cm/plg.

→El escenario-1 de las coordenadas curvilíneas combina los dos efectos recién descritos.

En coordenadas esféricas, un desplazamiento (dr,dθ,dφ) significa: $d\vec{S} = dr.\vec{E_r} + d\theta.\vec{E_\theta} + d\varphi.\vec{E_\varphi}$

La inclinación de los vectores base $\{\vec{E_r},\vec{E_\theta},\vec{E_\varphi}\}$ indica la dirección en la que se miden los diferenciales de coordenadas. Y la longitud de cada vector ayuda a completar la descripción: el vector de desplazamientos polares dθ tiene longitud 'r' y el vector de desplazamientos acimutales dφ tiene longitud r.senθ.

Ejercicio: Dibujar una esfera y repasar los conceptos básicos de este sistema de coordenadas.



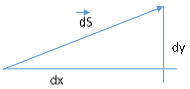
Advertencia-1: Los vectores $\vec{E_r}$, $\vec{E_\theta}$, $\vec{E_\varphi}$ no son los versores clásicos de norma unitaria $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_\varphi$.

Advertencia-2: Vimos que en algunos materiales consultados se invierten los roles θ y φ, o se nombra a alguno de los ángulos como ϕ. En este trabajo utilizamos **colatitud θ∈[0,π]** y **acimut φ∈[0,2π]**.

1.4.1 Métrica cartesiana o pitagórica:

En muchas situaciones físicas se obtienen resultados útiles prestándole atención *al módulo de los vectores antes que a sus componentes individuales.* Esto nos lleva a estudiar un concepto importante llamado métrica.

En coordenadas cartesianas o rectangulares, los extremos de un vector forman una hipotenusa cuya longitud al cuadrado es la suma de los cuadrados de los catetos (Teorema de Pitágoras).

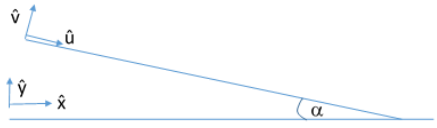


La figura muestra un caso de 2 dimensiones que se puede perfectamente ampliar a más dimensiones.

Así se llega a definir el invariante:

$(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ $\qquad$ $(dS')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2$

Este "diferencial de longitud al cuadrado" es *invariante frente a rotación* de ejes y ofrece un punto de encuentro para conciliar los escenarios del tipo-3.



Ejercicio: Demostrar la equivalencia métrica para los ejes inclinados del escenario-3, suponiendo

Vectores: Coordenadas:

$\hat{u} = \cos(\alpha)\hat{x} - \text{sen}(\alpha).\hat{y}$ $x = \cos(\alpha).u + \text{sen}(\alpha).v$

$\hat{v} = \text{sen}(\alpha)\hat{x} + \cos(\alpha).\hat{y}$ $y = -\text{sen}(\alpha).u + \cos(\alpha).v$

$x^2 + y^2 = [\cos(\alpha).u + \text{sen}(\alpha).v]^2 + [-\text{sen}(\alpha).u + \cos(\alpha).v]^2$

$x^2 + y^2 = [\cos^2\alpha.u^2 + 2.\cos\alpha.\text{sen}\alpha.u.v + \text{sen}^2\alpha.v^2] + [\text{sen}^2\alpha.u^2 - 2.\cos\alpha.\text{sen}\alpha.u.v + \cos^2\alpha.v^2]$

$x^2 + y^2 = \cos^2\alpha.u^2 + \text{sen}^2\alpha.u^2 + 2.\cos\alpha.\text{sen}\alpha.u.v - 2.\cos\alpha.\text{sen}\alpha.u.v + \text{sen}^2\alpha.v^2 + \cos^2\alpha.v^2$

$x^2 + y^2 = u^2.1 + 0 + v^2.1$

$x^2 + y^2 = u^2 + v^2$ ←para desplazamientos macroscópicos

$dx^2 + dy^2 = du^2 + dv^2$ ←para desplazamientos microscópicos (infinitesimales)

1.4.2 Otras métricas:

Para conciliar los escenarios tipo-1 donde se utilizan coordenadas curvilíneas, no basta con la definición simple de norma como producto escalar; hay que generalizar el concepto y pasar a una forma cuadrática.
$dS^2 = \langle dX, dX \rangle = [dX^*].[g].[dX]$, siendo

[g]=matriz métrica (llamada usualmente tensor métrico en esta disciplina)

[dX]=diferencial de coordenadas expresado como vector columna

[dX*]=vector fila (traspuesto)

Para el escenario-1 tenemos:

$[g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Coordenadas cartesianas: $[dX] = (dx, dy, dz)$ $dS^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$

$[g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\text{sen}^2(\theta) \end{bmatrix}$

Coordenadas esféricas: $[dX] = (dr, d\theta, d\varphi)$ $dS^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\text{sen}^2(\theta)(d\varphi)^2$

Ejercicio: Pensar cómo quedaría la matriz [g] y la forma expandida dS^2 para coordenadas cilíndricas.

Las coordenadas serían entonces números sin restricción en cuanto a sus unidades de medida: algunos números pueden ser longitudes, otros ángulos…etc, y el tensor métrico es quien se encargaría de armonizar todo para que $(dS)^2$ mida efectivamente longitudes al cuadrado.

Sin pretender que esto sea una definición formal, diremos por el momento que ***los tensores son objetos matemáticos que aparecen cuando es necesario generalizar el concepto del vector a más de 1 índice***.

En el caso del tensor métrico g[i,j] se precisan 2 índices, y sus componentes pueden visualizarse en una matriz con fila=i columna=j.

El uso que se le da al tensor métrico es el de una ***aplicación lineal que opera sobre parejas de vectores y devuelve un número***: $(dS)^2 = \sum_{i,j} dX[i].g[i,j].dX[j]$

La suma recorre las 9 combinaciones de i,j variando entre 1 y 3, siendo 3 la dimensión del espacio. ¿Por qué 2 índices? Para contemplar la posibilidad de que el tensor métrico tenga componentes fuera de la diagonal. Si hubiera 3 vectores base $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ y se diera el caso de que $\vec{u},\vec{v}$ no son perpendiculares entre sí, aparecería un casillero no nulo en la posición (u,v) de la matriz, que se correspondería con un término mixto o cruzado proporcional al producto du.dv en la métrica expandida $(dS)^2$.

En el curso de este trabajo veremos que las métricas no cartesianas aparecen en 4 diferentes contextos:

* coordenadas curvilíneas →por ejemplo cilíndricas, esféricas o elipsoidales.
* coordenadas solidarias a un sistema acelerado →por ejemplo coordenadas hiperbólicas.
* medidas sobre una superficie curva.
* espacio-tiempo afectado por gravedad.

1.4.3 Cambio de coordenadas, matriz jacobiana:

Cada sistema de referencia tiene su base de vectores y su conjunto de coordenadas.

- Σ tiene vectores=$\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ coordenadas=(x_1,x_2,x_3)
- Σ' tiene vectores=$\{\vec{e_1}',\vec{e_2}',\vec{e_3}'\}$ coordenadas=(x'_1,x'_2,x'_3)

Para hacer efectiva la descripción por múltiples sistemas de referencia, debe existir una regla de conversión para expresar los objetos primados en función de los objetos sin primar. Y una regla inversa para realizar el cálculo en el otro sentido.

En el escenario-2 del escalado tenemos una regla bien simple:

$\vec{e_1}'=k.\vec{e_1}$ $\vec{e_2}'=k.\vec{e_2}$ $\vec{e_3}'=k.\vec{e_3}$

$x'_1=x_1/k$ $x'_2=x_2/k$ $x'_3=x_3/k$

La constante de proporcionalidad es k=2.54 cm/plg

Los vectores base *crecen* al pasar de la referencia centímetros (Σ) a la referencia pulgadas (Σ').

Por otro lado, las coordenadas *disminuyen* por ese mismo factor.

Vemos que de alguna manera la información métrica está contenida en los vectores base.

Al inicio de este trabajo afirmábamos que las ternas de números por sí solas no contienen toda la información útil. Pero si cada equipo de trabajo Σ y Σ' anuncia los vectores base que está utilizando, entonces sí disponemos de la información de distancias necesaria para realizar conciliaciones.

En el escenario-1 tenemos reglas algo más complicadas:

coordenadas Σ={x,y,z} Σ'={r,θ,φ}

vectores Σ={$\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$} Σ'={$\vec{E_r}$, $\vec{E_\theta}$, $\vec{E_\varphi}$}

$x=r.\text{sen}(\theta).\cos(\varphi)$ $y=r.\text{sen}(\theta).\text{sen}(\varphi)$ $z=r.\cos(\theta)$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\theta=\text{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}/z)$ $\varphi=\text{arctg}(y/x)$

$dx=dr.\text{sen}(\theta).\cos(\varphi) + r.d\theta.\cos(\theta).\cos(\varphi) - r.d\varphi.\text{sen}(\theta).\text{sen}(\varphi)$

$dy=dr.\text{sen}(\theta).\text{sen}(\varphi) + r.d\theta.\cos(\theta).\text{sen}(\varphi) + r.d\varphi.\text{sen}(\theta).\cos(\varphi)$

$dz=dr.\cos(\theta) - r.d\theta.\text{sen}(\theta)$

$\vec{E}_r = \vec{e_x}.\text{sen}(\theta).\cos(\varphi) + \vec{e_y}.\text{sen}(\theta).\text{sen}(\varphi) + \vec{e_z}.\cos(\theta)$

$\vec{E}_\theta = \vec{e_x}.r.\cos(\theta).\cos(\varphi) + \vec{e_y}.r.\cos(\theta).\text{sen}(\varphi) - \vec{e_z}.r.\text{sen}(\theta)$

$\vec{E}_\varphi = -\vec{e_x}.r.\text{sen}(\theta).\text{sen}(\varphi) + \vec{e_y}.r.\text{sen}(\theta).\cos(\varphi)$

Las funciones de conversión globales (x,y,z)←→(r,θ,φ) son no-lineales, pero localmente alrededor de cada punto existe para los vectores base y los diferenciales coordenados una transformación lineal cuya matriz asociada es el Jacobiano: $dX[i]= \Sigma_j \text{Jac}[i,j].dX'[j]$ siendo $\text{Jac}[i,j]=\partial X[i]/\partial X'[j]$,

El casillero [i,j] de la matriz jacobiana es la derivada parcial de la variable X[i] en función de X'[j].

[Jac i j]	j=r	j=θ	j=φ
i=x	sen(θ).cos(φ)	r.cos(θ).cos(φ)	-r.sen(θ).sen(φ)
i=y	sen(θ).sen(φ)	r.cos(θ).sen(φ)	+r.sen(θ).cos(φ)
i=z	cos(θ)	-r.sen(θ)	0

Ejercicio-1) Demostrar que las columnas del jacobiano son los componentes de los vectores $\{e_r,e_\theta,e_\varphi\}$, que se relacionan con los versores clásicos de norma unitaria según las fórmulas $e_r=\hat{e}_r$, $e_\theta=r.\hat{e}_\theta$, $e_\varphi=r.\text{sen}(\theta).\hat{e}_\varphi$.

Ejercicio-2) Demostrar que se obtiene una matriz diagonal al multiplicar el Jacobiano traspuesto por el Jacobiano original. ¡En ese orden [Jac*].[Jac]!

1.4.4 Co-varianza, contra-varianza, invarianza:

Queremos que las leyes físicas sean invariantes y que sean enunciadas en un mismo formato común a todos los sistemas de referencia. Veremos un ejemplo sobre lo que esto significa.
Los miembros de los equipos Σ y Σ' se ubican en un punto común del espacio $S_o^{\rightarrow}$.

En Σ realizan un pequeño desplazamiento y lo informan como $dS^{\rightarrow} = dx.E_x^{\rightarrow} + dy.E_y^{\rightarrow} + dz.E_z^{\rightarrow}$.
En Σ' convierten los desplazamientos y los vectores a su sistema de referencia y obtienen
$dS'^{\rightarrow} = dx'.E'_x^{\rightarrow} + dy'.E'_y^{\rightarrow} + dz'.E'_z^{\rightarrow}$.

El formato matemático es exactamente el mismo, unos anotan los objetos con primas y otros sin primas.
Genéricamente tenemos la siguiente sumatoria: $dS^{\rightarrow} = \Sigma_i\, e^{\rightarrow}[i].dx[i]$.
La definición indica avanzar dx[i] unidades según cada vector $e^{\rightarrow}[i]$, luego sumar en 'i' desde i=1 hasta i=3.
Después de aplicar el desplazamiento ambos grupos acceden al mismo punto físico: $S_o^{\rightarrow}+dS^{\rightarrow}=S_o^{\rightarrow}+dS'^{\rightarrow}$.

Decimos que el diferencial de línea $dS^{\rightarrow}$ es un invariante. En el escenario-2 (escalado) es inmediato demostrar la invarianza debido a que los factores k y 1/k se compensan:

$dS'^{\rightarrow} = \Sigma_i\, e'^{\rightarrow}[i].dx'[i]$ →convertimos vectores y coordenadas
$dS'^{\rightarrow} = \Sigma_i\, k.e^{\rightarrow}[i].dx[i]/k$ →agrupamos factores 'k'
$dS'^{\rightarrow} = \Sigma_i\, k/k.e^{\rightarrow}[i].dx[i]$
$dS'^{\rightarrow} = \Sigma_i\, e^{\rightarrow}[i].dx[i]$
$dS'^{\rightarrow} = dS^{\rightarrow}$

En otro caso más general hay que recurrir a la matriz jacobiana y a las siguientes reglas:

- Vectores base: $e'[j] = \Sigma_i\, e[i].\, Jac[i,j]$
- Diferenciales de desplazamiento coordenado: $dx[i] = \Sigma_j\, Jac[i,j].dx'[j]$

Observación: Si quisiéramos obtener los dx'[j] a partir de los dx[i], deberíamos resolver un sistema de ecuaciones 3x3 o multiplicar por la matriz inversa $[Jac^{-1}]$.

$dS^{\rightarrow} = \Sigma_i\, e^{\rightarrow}[i].dx[i]$ expandimos $dx[i] = \Sigma_j\, Jac[i,j].dx'[j]$ →
$dS^{\rightarrow} = \Sigma_i\, e^{\rightarrow}[i].\, \Sigma_j\, Jac[i,j].dx'[j]$ Reordenamos sumatorias →
$dS^{\rightarrow} = \Sigma_j\, dx'[j]\, \Sigma_i\, e^{\rightarrow}[i].\, Jac[i,j]$ Reconocemos $e'^{\rightarrow}[j] = \Sigma_i\, e^{\rightarrow}[i].\, Jac[i,j]$ →
$dS^{\rightarrow} = \Sigma_j\, dx'[j]\, e'^{\rightarrow}[j]$
$dS^{\rightarrow} = dS'^{\rightarrow}$

Ejercicio: Verificar lo anterior en el escenario-1 de coordenadas rectangulares y esféricas.

En la expresión $dS^{\rightarrow} = \Sigma_i\, e^{\rightarrow}[i].dx[i]$ reconocemos una estructura similar al ***producto escalar*** en el sentido de que se multiplican los respectivos obj[i] (objetos de índice 'i') y luego se suma en el índice 'i'.
La métrica, otro invariante, también responde a este esquema porque es el producto escalar de un vector consigo mismo. En el caso simple de coordenadas rectangulares $(dS)^2 = \Sigma_i\, dx[i].dx[i]$.

Esto que acabamos de ver con el diferencial de línea lo utilizaremos muchas veces en este trabajo como estructura o **"*receta*" de cómo encontrar invariantes en la Física:**.

- Enunciar las ecuaciones en formato "suma de productos", como un producto escalar de vectores.
- Uno de los objetos participantes de la ecuación se transforma igual que los vectores base al cambiar de referencia, y lo definimos como co-variante.
- El otro objeto se transforma igual que el vector de desplazamientos coordenados, es decir, al revés o en contra de los vectores base. Lo llamamos contra-variante.

Invariante es una magnitud o una expresión que no se modifica al pasar de un sistema a otro.
En general se logra esta invarianza combinando las dos varianzas anteriores y cancelando sus efectos.

Por objeto nos referimos, por ejemplo:

- al conjunto de vectores base $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ o $\{\vec{E_r}, \vec{E_\theta}, \vec{E_\varphi}\}$
- al conjunto de desplazamientos diferenciales en el espacio (dx,dy,dz) o (dr,dθ,dφ).
- a las componentes de un vector en cierta base, como (fr,fφ,fz)

Ejercicio: Dada una función escalar, demostrar que el conjunto de sus derivadas parciales respecto a las coordenadas forma una entidad covariante (corresponde al *gradiente* en las coordenadas cartesianas).
La visualización más fácil se logra en el escenario-2 del escalado: si los científicos del referencial Σ miden un gradiente térmico de valor 4, el equivalente en Σ' debería ser de ≈10 porque 4 grados por centímetro son del orden de 10 grados por pulgada (exactamente 4k=4*2.54=10.16).
→Al cambiar de referencia, el gradiente aumenta por el mismo factor que los vectores base $\vec{e}_i$.

En un caso genérico la demostración es por Regla de la Cadena.

$\partial f/\partial r = \partial f/\partial x.\partial x/\partial r + \partial f/\partial y.\partial y/\partial r + \partial f/\partial z.\partial z/\partial r$, reescrito en términos del jacobiano queda:

$\partial f/\partial r = \partial f/\partial x.Jac[x,r] + \partial f/\partial y.Jac[y,r] + \partial f/\partial z.Jac[z,r]$

$\partial f/\partial \theta = \partial f/\partial x.Jac[x,\theta] + \partial f/\partial y.Jac[y,\theta] + \partial f/\partial z.Jac[z,\theta]$

$\partial f/\partial \varphi = \partial f/\partial x.Jac[x,\varphi] + \partial f/\partial y.Jac[y,\varphi] + \partial f/\partial z.Jac[z,\varphi]$

El producto matricial es $[\partial_X \cdot f] = [\partial_X f].[Jac]$

$$\begin{matrix} & [J_{xr} & J_{x\theta} & J_{x\varphi}] \\ & [J_{yr} & J_{y\theta} & J_{y\varphi}] \\ & [J_{zr} & J_{z\theta} & J_{z\varphi}] \\ [\partial_x f\ \partial_y f\ \partial_z f] & [\partial_r f & \partial_\theta f & \partial_\varphi f] \end{matrix}$$

El gradiente según las coordenadas X se visualiza como un vector *fila*, al multiplicar a la derecha por el Jacobiano da otro vector fila, que resulta ser el gradiente en las coordenadas X' del cambio de variable.
En forma similar, los vectores contravariantes se pueden visualizar como vectores *columna*.
Y en este caso la transformación consiste en multiplicar a la izquierda por el Jacobiano.
Para pasar del formato fila al formato columna hay que realizar trasposición de matrices.

Advertencia: el producto matricial no es conmutativo, debe prestarse atención al orden exacto en que se ejecutan las multiplicaciones para lograr la invariancia.

Notación: En varios pasajes de este trabajo utilizaremos la notación genérica $\partial_i = \partial/\partial X[i]$ para referirnos a la derivada parcial respecto a la coordenada i-ésima, con lo cual reforzamos la analogía con la posible interpretación como el componente i-ésimo de un vector o el casillero i-ésimo de un arreglo.
Ejemplo: si el campo eléctrico es el gradiente (negativo) de un potencial Φ, podríamos escribir $E[i] = -\partial_i \Phi$.
La componente-i se expresa en términos de la derivada parcial respecto a la coordenada-i.
Por una especie de *abuso de notación*, consideramos que operar ∂_i con algo escrito a su derecha es aplicar la derivada de aquello que colocamos a la derecha del operador $\partial_i \rightarrow \partial_x f = \partial f/\partial x$.

Diferencial invariante: $df = \Sigma_i \partial_i f.dX[i] = \Sigma_i \partial'_i f.dX'[i]$
f() es una función escalar que depende de la ubicación espacial, es decir, de las coordenadas.
Al pasar al otro referencial de las coordenadas X'[i], el diferencial df se mantiene invariante gracias a la varianza opuesta de sus partes constituyentes. La ecuación recién planteada admite dos lecturas:

- diferencial de la función 'f' expresado según la regla de la cadena.
- producto escalar (invariante) entre el gradiente y el diferencial de desplazamientos.

Invariante trivial: $IT=\sum_i \partial_i X[i]$

Aquí estamos imaginando al operador "nabla" ∇ como un vector de componentes $[\partial_1, \partial_2, \partial_3]$, al que operamos punto a punto con otro vector como si fuera un producto escalar.

En coordenadas rectangulares es $IT=\partial x/\partial x + \partial y/\partial y + \partial z/\partial z = 1 + 1 + 1 =3$

En coordenadas esféricas es $IT=\partial r/\partial r + \partial \theta/\partial \theta + \partial \varphi/\partial \varphi = 1 + 1 + 1 =3$

En cualquier base esta sumatoria inspirada en un falso *producto escalar* va a dar el mismo número, que es la dimensión del espacio vectorial. Es un ejemplo sin utilidad física, simplemente ilustra cómo se combina un objeto covariante (el operador de derivadas ∂_i) con un objeto contravariante (las coordenadas x[i]) para producir un invariante.

1.5 La cuarta dimensión.

En la sección anterior pospusimos el análisis del escenario-4 del movimiento relativo entre Σ y Σ' porque no podemos enmarcarlo dentro de una estructura de 3 dimensiones espaciales.
El inconveniente de lo que llamamos informalmente "escenario-4" está en la regla de transformación entre los diferenciales de desplazamiento:

$dx = dx' + \mathbf{v_o.dt}$ (desplazamiento absoluto = desplazamiento relativo + arrastre)
$dy = dy'$
$dz = dz'$

Por causa del término '$\mathbf{v_o.dt}$' ya no es viable la estructura de la matriz jacobiana 3x3 que en los restantes escenarios permitía obtener los diferenciales dX en base a los diferenciales dX' del otro sistema.

1.5.1 Cuadrivector tiempo-espacio:

Resolvemos el problema anterior si incluimos al tiempo como cuarta dimensión, y definimos:

diferencial de tiempo-espacio en Σ $dX4$: (dt, dx, dy, dz)
diferencial de tiempo-espacio en Σ' $dX'4$: (dt', dx', dy', dz')

Entonces se cumple matricialmente $dX[i]=\sum_j Jac[i,j]dX'[j]$
donde ahora el índice de la suma va desde j=0 hasta j=3.

El jacobiano pasa a ser una matriz 4x4:

$$[Jac]= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_o & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este concepto del cuadrivector puede parecer algo artificioso en un principio, pero en el próximo capítulo 2 buscaremos y encontraremos en la Física otros ejemplos de magnitudes que se "mezclan" al cambiar entre sistemas de referencia con movimiento relativo. En todos nuestros ejemplos veremos que una magnitud escalar y una vectorial agrupan sus componentes (1+3) para formar un objeto de dimensión 4. También veremos que muchas ecuaciones físicas pueden formularse en términos de estos cuadrivectores.

1.5.2 Diferencial de línea invariante:

Llamamos $d\vec{S}$ al desplazamiento infinitesimal entre dos puntos próximos del espacio de 4 dimensiones.
Partimos del sistema Σ

$d\vec{S}= dt.\vec{E_t} + dx.\vec{E_x} + dy.\vec{E_y} + dz.\vec{E_z}$

Luego pasamos a Σ' convirtiendo las coordenadas:

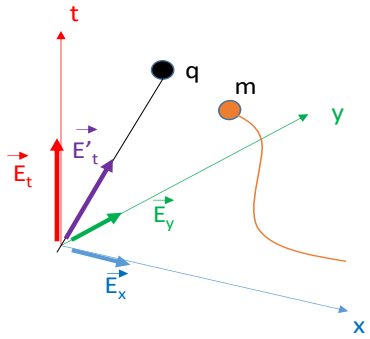
$d\vec{S}= dt.\vec{E_t} + dx.\vec{E_x} + dy.\vec{E_y} + dz.\vec{E_z}$ →dt=dt',dx=dx'+v_o.dt',dy=dy',dz=dz'
$d\vec{S}= dt'.\vec{E_t} + (dx'+v_o.dt').\vec{E_x} + dy'.\vec{E_y} + dz'.\vec{E_z}$
$d\vec{S}= dt'.\vec{E_t} + (dx'+v_o.dt').\vec{E_x} + dy'.\vec{E_y} + dz'.\vec{E_z}$ →reagrupamos
$d\vec{S}= dt'.[\vec{E_t}+v_o.\vec{E_x}] + dx'.\vec{E_x} + dy'.\vec{E_y} + dz'.\vec{E_z}$
$d\vec{S}'= dt'.\vec{E'_t} + dx'.\vec{E'_x} + dy'.\vec{E'_y} + dz'.\vec{E'_z}$

$d\vec{S}$ debe coincidir con $d\vec{S}'$, lo que implica que los vectores transformados son todo aquello que está multiplicando a los diferenciales de desplazamiento.

Covariante:	$\vec{E'_t}=\vec{E_t}+v_o.\vec{E_x}$	$\vec{E'_x}=\vec{E_x}$	$\vec{E'_y}=\vec{E_y}$	$\vec{E'_z}=\vec{E_z}$
Contravariante:	dt=dt'	dx=dx'+v_o.dt'	dy=dy'	dz=dz'

Todas las magnitudes físicas que estudiemos tendrán que corresponderse con alguna de estas varianzas para poder formar parte de ecuaciones invariantes.
Durante el estudio de la Relatividad Especial nos vamos a concentrar fundamentalmente en el cambio de referencia de movimiento relativo, llamado escenario-4. A partir del capítulo 6, cuando estudiemos Relatividad General, veremos estos conceptos aplicados a cambios de variable que involucran coordenadas curvilíneas o sistemas acelerados (el jacobiano de transformación será diferente en cada caso).

En un diagrama espacio-tiempo visualizamos gráficamente los diferenciales de desplazamiento.
Como no podemos dibujar 4 dimensiones, en cada situación a la que nos enfrentemos deberemos eliminar de las gráficas alguna dimensión espacial que permanezca constante durante el análisis o que no sea relevante al problema.
En este ejemplo sacrificamos la dimensión espacial 'z'→resumimos toda la parte espacial en el plano 'xy'.
La "altura" del dibujo simplificado pasa a ser la dimensión temporal. (*En el futuro habrá ocasiones en que sacrificaremos también la dimensión 'y', y resumiremos todo el espacio en un solo eje 'x'*).



Los ejes coordenados son:
x:azul,
y:verde,
tiempo:rojo según Σ, tiempo:violeta según Σ'

Cada punto del espaciotiempo 4D se llama evento o suceso; sus 4 coordenadas describen el instante (t) y el lugar (x,y,z) en que ocurre el suceso.
Un conjunto de sucesos asociados a un cuerpo o partícula forman su trayectoria o línea de Universo.
En naranja se dibuja el rastro que deja la trayectoria de una masa de prueba 'm'.
En negro se dibuja el rastro de una carga de prueba 'q', al evolucionar en el tiempo.
Los desplazamientos son dx según el vector $\vec{E}_x$, dy según el vector $\vec{E}_y$, dt según el vector $\vec{E}_t$…
También podrían expresarse en el otro referencial como dx' según $\vec{E'}_x$, dt' según el vector $\vec{E'}_t$….etc
→diferentes vectores base ponderados por distintos diferenciales pero que conducen finalmente al mismo punto físico.

En el caso particular de la figura, la carga 'q' describe un movimiento uniforme con $\vec{u}=v_o.\hat{x}$ y sus desplazamientos son únicamente temporales según el eje violeta $\vec{E'}_t$. En su referencial solidario Σ', la partícula está quieta en el espacio, sin embargo "*se mueve en el tiempo*". Al avanzar en el estudio del espacio cuadridimensional deberemos acostumbrarnos a estas frases que suenan raro.
Observación: En Σ' el eje temporal está levemente inclinado debido a que la fórmula de conversión de vectores base entre Σ y Σ' involucra sumar una componente x: $\vec{E'}_t=\vec{E}_t+v_o.\vec{E}_x$

2. LEYES FÍSICAS.

A lo largo de este trabajo sobre Relatividad intentaremos cultivar la idea de que todas las leyes físicas deben tener la misma forma invariante al cambiar de referencia entre dos sistemas Σ y Σ'.
Comenzamos listando un conjunto de leyes físicas en su formato pre-relativista. Tratamos de prestar atención a aquellas que tengan un aspecto similar al del producto escalar, que es la receta que conocemos actualmente para aspirar a llevarlas a una forma invariante.
Las ecuaciones nos revelarán parejas de un escalar + un vector, "candidatos" a cuadrivector. En cada caso deberemos evaluar si tiene sentido operar en 4 dimensiones y juntar ambas magnitudes en un mismo objeto cuadri-dimensional; para eso es necesario analizar el cambio de referencia por movimiento relativo y encontrar alguna *mezcla* o *contaminación* entre los componentes espaciales y temporales durante el pasaje de Σ a Σ'. Así como teníamos dx'=dx–v_o.dt con los desplazamientos.

Conservación de la energía mecánica	$\dot{W} = \vec{f} \cdot \vec{u}$
Conservación de la carga eléctrica	$\nabla \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0$
Ley de Gauss-Coulomb	$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_o$
Ley de Biot-Savart	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Ley de Faraday	$\nabla \wedge \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$
Ley de Ampere	$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_o (\vec{J} + \epsilon_o . \partial_t \vec{E})$
Fuerza de Lorentz	$\vec{F} = q.\vec{E} + q.\vec{u} \wedge \vec{B}$
Lagrangeano de una partícula cargada	$\mathcal{L} = ½.m.u^2 - q.\Phi + q.\vec{u} \cdot \vec{A}$ $\quad \vec{u}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z}),\ \dot{x}=dx/dt$
Condición de calibre Lorenz	$\nabla \cdot \vec{A} + 1/c^2 . \partial_t \Phi = 0$
Ecuación de ondas escalar	$\nabla^2 \Phi - 1/c^2 . \partial_t^2 \Phi = -\rho/\epsilon_o$
Ecuación de ondas vectorial	$\nabla^2 \vec{A} - 1/c^2 . \partial_t^2 \vec{A} = -\mu_o . \vec{J}$
Función de onda armónica	$func(\vec{r},t) = \cos(\omega . t - \vec{k} \cdot \vec{r})$

2.1 Cuadrivectores.

Posponemos para más adelante el análisis de los rotacionales o productos vectoriales, y resaltamos las ecuaciones que involucran producto escalar o divergencia (esta última puede verse como un producto escalar con el operador nabla ∇). Los cuadrivectores que comenzaremos a analizar son: cuadrivector potencia-fuerza o cuadrifuerza, carga-corriente, cuadri-derivada, cuadri-potencial y cuadrivector de onda.

2.1.1 Cuadrivector potencia-fuerza:

Nuestro punto de partida va a respetar el orden cronológico en que fue evolucionando la Física, comenzando con una versión más liviana de la Relatividad que surgió un par de siglos antes. Es el llamado Principio de Relatividad de Galileo, que afirmaba que las leyes de la Mecánica deberían tener la misma forma observadas desde referenciales en movimiento relativo.
La Teoría de la Relatividad ampliará este principio hacia otras áreas de la Física además de la Mecánica.

Consideremos la ecuación del trabajo mecánico:
$\dot{W} = \vec{f} \cdot \vec{u}$ potencia = producto escalar fuerza $_x$ velocidad.
Lo primero que buscamos es expresarla como producto escalar de cuadrivectores; estamos bastante cerca porque las partes espaciales ya las tenemos sugeridas: $\vec{f}$ en un caso, $\vec{u}$ en otro.

Nos proponemos construir cuadrivectores tales que su cuarta componente temporal complete la ecuación en forma de producto escalar, y nuestros primeros candidatos podrían ser, por ejemplo:

cuadrivector tiempo-posición	$=X4$	:	(t,	x,	y,	z)
cuadrivelocidad	$U4=dX4/dt$	:	(1,	u_x,	u_y,	u_z)
cuadrivector potencia-fuerza	$=F4$	:	(Ẇ,	f_x,	f_y,	f_z)

Al momento de multiplicar escalarmente ambos cuadrivectores, vemos que $F4 \cdot U4$ no reproduce exactamente la ecuación de la energía→ hay una discordancia en el signo del producto de componentes temporales. $F4 \cdot U4 = \dot{W}.1 + f_x.u_x + f_y.u_y + f_z.u_z$ no da 0.
La formulación exacta que precisamos es que el producto de componentes temporales reste en vez de sumar: $\vec{f} \cdot \vec{u} - \dot{W} = 0$. La escribimos con corchetes triangulares como $\langle F4, U4 \rangle = 0$.
$\langle F4, U4 \rangle = - F4[0].U4[0] + F4[1].U4[1] + F4[2].U4[2] + F4[3].U4[3]$

Identificamos la necesidad de considerar una aplicación o "mapeo" $\langle , \rangle$ muy similar al producto escalar, que opera sobre parejas de cuadrivectores y devuelve un número. Por ahora no le ponemos nombre a esa aplicación, en secciones y capítulos siguientes iremos viendo que tiene una interpretación métrica.
La invarianza de nuestras leyes físicas, en este caso la ecuación del trabajo y la energía, estaría condicionada a la invarianza de esta aplicación al pasar de un referencial inercial a otro.
Es decir, también debería cumplirse en Σ': $\langle F'4, U'4 \rangle = 0$.

Luego analizamos cómo varían las componentes de estos cuadrivectores durante el cambio entre dos referenciales inerciales Σ y Σ'.
Respecto a la velocidad, la relación de transformación al pasar de Σ a Σ' es inmediata de ver:

$u_x = u'_x + v_o$	velocidad absoluta = velocidad relativa + velocidad de arrastre
$u_y = u'_y$, $u_z = u'_z$	no hay alteración en los ejes (y,z) transversales al movimiento

Respecto a la fuerza debemos ser más cuidadosos y realizar más cálculos.

$\vec{u} = \vec{u'} + \vec{v_o}$	→derivamos respecto al tiempo ambos miembros
$d\vec{u}/dt = d\vec{u'}/dt + d\vec{v_o}/dt$	→ $\vec{v_o}$=cte por ser movimiento rectilíneo uniforme
$d\vec{u}/dt = d\vec{u'}/dt$	

Es decir que las aceleraciones son las mismas: $\vec{a} = \vec{a'}$.
Y las fuerzas también $\vec{f} = \vec{f'}$, en compatibilidad con la ley de Newton $\vec{f} = m.\vec{a}$

$\dot{W} = f_x.u_x + f_y.u_y + f_z.u_z$	partimos de la potencia en Σ
$\dot{W} = f_x.u_x + f_y.u_y + f_z.u_z$	→sustituimos $u_x = u'_x + v_o$, $u_y = u'_y$, $u_z = u'_z$
$\dot{W} = f_x.(u'_x + v_o) + f_y.u'_y + f_z.u'_z$	→expandimos
$\dot{W} = f_x.u'_x + v_o.f_x + f_y.u'_y + f_z.u'_z$	→aplicamos Galileo(*) $f_x = f_x'$, $f_y = f_y'$, $f_z = f_z'$
$\dot{W} = f_x'.u'_x + v_o.f_x' + f_y'.u'_y + f_z'.u'_z$	
$\dot{W} = f_x'.u'_x + v_o.f_x' + f_y'.u'_y + f_z'.u'_z$	→reconocemos la potencia en Σ': $\dot{W}'$
$\dot{W} = \dot{W}' + v_o.f_x'$	
$\dot{W} = \dot{W}' + v_o.f_x'$	

Encontramos la relación buscada. Todos los cuadrivectores que estudiemos deberán seguir un patrón similar de "mezcla" de componentes durante un cambio de referencia por movimiento relativo, en intensidad proporcional a la velocidad v_o. Especialmente importa que se mezcle la componente temporal con una espacial; si solo se mezclaran las espaciales no habría gran diferencia con una rotación tri-dimensional.
En este caso la potencia $\dot{W}$ (componente-0) se ve afectada por la fuerza f_x (componente-1).

(*) Hay un paso de la demostración anterior que merece un comentario especial: $\vec{f} = \vec{f'}$ es la esencia de la Relatividad de Galileo: movernos a velocidad constante no requiere el agregado de ninguna *fuerza inercial* o *ficticia* como la centrífuga de una calesita giratoria o como el empuje que recibimos hacia atrás o hacia adelante del asiento cuando viajamos en un vehículo que acelera o frena.
Mencionamos también que se llama "Transformación de Galileo" a la transformación de coordenadas compatible con esta igualdad de fuerzas: $t = t'$, $x = x' + v_o.t'$, $u_x = u'_x + v_o$.

2.1.2 Cuadrivector carga-corriente:

La carga eléctrica y la corriente eléctrica son otros candidatos a formar un cuadrivector porque están directamente relacionados: corriente es carga por unidad de tiempo.
¿Qué se modifica durante un cambio de referencia por movimiento relativo? Lo principal a tener en cuenta es que si en Σ' hay densidad volumétrica de carga ρ', desde el referencial Σ eso se ve como causante de una componente adicional de corriente $\vec{J}$ en la dirección del movimiento, de magnitud $\rho'.\vec{v_o}$.

Las fórmulas de transformación de componentes son muy simples y no las demostramos, apenas hacemos un análisis de unidades: $[\rho'.v_o]$=Coulomb/m^3.m/s=Coul/m^2/s=(Coul/s)/m^2=Amp/m^2=$[\vec{J}]$.

$\rho = \rho'$

$J_x = J'_x + v_o.\rho'$ corrientes óhmicas + corrientes de arrastre o de transporte

$J_y = J'_y$

$J_z = J'_z$

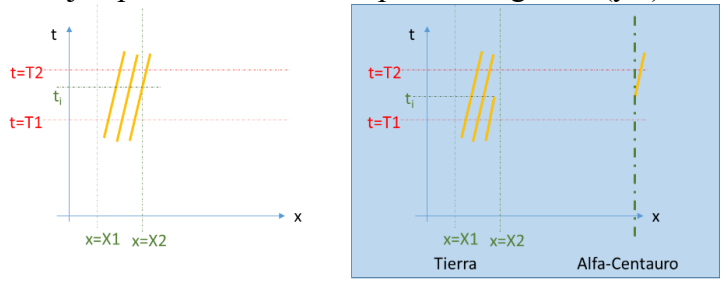
Las corrientes óhmicas tienen significado a nivel *microscópico*, se asocian a un flujo de partículas portadoras de carga en el interior de un conductor o semiconductor, el cual mantiene su estructura iónica cristalina al moverse. Son análogas a una velocidad relativa respecto al material.
En cambio las corrientes de transporte o arrastre implican un movimiento *macroscópico* de toda la estructura donde están alojadas las cargas.
→La ley de transformación J_x vs. J'_x es muy similar a la de la adición de velocidades porque el vector de corriente $\vec{J}$ está asociado al vector velocidad $\vec{u}$ de las cargas eléctricas.

Definimos entonces cuadrivector carga-corriente como $\mathcal{J}4=(\rho,J_x,J_y,J_z)$.
Muchas veces condensaremos las 3 componentes espaciales y anotaremos en forma abreviada como $\mathcal{J}4=(\rho,\vec{J})$. Veremos cómo este cuadrivector aparece en leyes de la Física, junto a otros cuadrivectores.

2.1.3 Cuadrivector de derivadas parciales:

Tomemos como ejemplo la ecuación de continuidad de la carga eléctrica que relaciona la divergencia del vector densidad de corriente con la derivada temporal de la densidad volumétrica de carga: $\nabla \cdot \vec{J} + \partial\rho/\partial t = 0$.
→Si en una región el flujo neto de corriente es entrante, la densidad local de carga tiende a aumentar.
→Si el flujo neto de corriente es saliente, la densidad local tiende a disminuir.
Cualquier variación local de carga debe asociarse a flujos de corriente que salieron del volumen de análisis o entraron allí durante el tiempo de observación: es una expresión de la conservación local de la carga.

Antes de abordar las fórmulas matemáticas intentaremos visualizar esto en un diagrama espacio-tiempo, para reforzar la idea de que nos encontramos frente a un problema genuinamente cuadri-dimensional que justifica utilizar cuadri-vectores. Por supuesto, la gráfica no podrá ser "4D" ☺; debemos suprimir algunas dimensiones espaciales que no participen del análisis, y resumir todo el espacio en menos coordenadas. Para este ejemplo alcanza con 'x', podemos ignorar (y,z).



En esta figura las líneas naranjas representan las trayectorias de 3 cargas eléctricas.
El intervalo temporal de análisis es $t\in[T_1,T_2]$ y el espacial es $x\in[x_1,x_2]$, $y\in[y_1,y_2]$, $z\in[z_1,z_2]$ (*y,z no se dibujan*).
En la figura de la izquierda, en tiempo $t=T_1$, 3 líneas naranjas cruzan el segmento espacial $x\in[x_1,x_2]$.
Pero solo 2 de ellas cruzan $t=T_2$, esto significa $\rho(T_1)>\rho(T_2)$.

¿Adónde fue a parar la carga que desapareció de la región de análisis? Hay registro de que atravesó la frontera $x=x_2$ en algún punto intermedio t_i, en forma de corriente eléctrica.
El nombre "ecuación de continuidad" se refiere al hecho de que las trayectorias de las cargas deben ser líneas de trazo continuo, que se puedan dibujar sin levantar el lápiz o la lapicera. Eso está asociado a la **conservación local** de la carga: al intervalo espacio-temporal entran tantas líneas como las que salen.

La figura de la derecha imagina un escenario de ciencia ficción o futurista en el que tal vez haya que reconsiderar esta ecuación. Una de las cargas desaparece en un tiempo 't_i' intermedio $t_1<t_i< t_2$ y se rematerializa en los alrededores de la estrella Alfa del Centauro, a más de 4 años luz de distancia.
Seguiría habiendo **conservación global** de la carga, pero el teletransporte afecta la conservación local.

En base a esta visualización anterior, nos proponemos expresar la ecuación de conservación de la carga en términos de una divergencia cuadri-dimensional $\nabla \cdot \vec{J} + \partial\rho/\partial t = 0$.
La parte espacial de esta ecuación es un producto escalar del operador nabla ∇ con el vector $\vec{J}$.
La parte temporal involucra la cuarta componente del cuadrivector $\mathcal{J}4$ ya definido.
Para que nos quede exactamente un producto escalar de cuadrivectores, debemos agregar una cuarta componente que acompañe al operador ∇.

Definimos "cuadri-derivada"	$\mathcal{\partial}4 = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$		abreviado (∂_t, ∇)
Juntamos con carga-corriente	$\mathcal{J}4 = (\rho, J_x, J_y, J_z)$	:	abreviado $(\rho, \vec{J})$
operamos componente a componente y sumamos	$\mathcal{\partial}4 \cdot \mathcal{J}4 = \partial_t\rho + \partial_x J_x + \partial_y J_y + \partial_z J_z = 0$		

Es una evolución lógica al pasar de 3 a 4 dimensiones. Los componentes de $\mathcal{\partial}4$ se indizan como ∂_i, con $i=0,1,2,3$. El casillero agregado $\mathcal{\partial}4[0]=\partial_o$ pasa a ser la derivada temporal ∂_t.

Ejercicio: Demostrar por regla de la cadena las relaciones entre las derivadas ∂_x y las derivadas $\partial_{x'}$ para el caso de dos sistemas en movimiento relativo con velocidad v_o según $\hat{x}$:

$\partial_t' = \partial_t + v_o.\partial_x$ $\quad$ $\partial_x' = \partial_x$ $\quad$ $\partial_y' = \partial_y$ $\quad$ $\partial_z' = \partial_z$

→ La ecuación en ∂_t' tiene una interpretación interesante: Si atravesamos una región donde una cierta magnitud es constante en el tiempo ($\partial/\partial t=0$) pero cambia con la coordenada 'x'→ en ese referencial móvil Σ' vamos a percibir una variación temporal $\partial/\partial t'$. Incluso aceptando la hipótesis de tiempo universal de Newton $t=t'$ (hipótesis que pronto sacudiremos con esta Teoría de la Relatividad), ya en estos primeros capítulos podemos visualizar que $\partial/\partial t' \neq \partial/\partial t$.

2.1.4 Cuadrivector potencial:

El Lagrangeano o Lagrangiano de la Mecánica Clásica es EnergíaCinética –EnergíaPotencial: $\mathcal{L} = E_{cin} - U_{pot}$
Cuando se aplica a una partícula con carga eléctrica 'q' en presencia de campos electromagnéticos, se puede definir un potencial dependiente de la velocidad $U_{pot} = q.\Phi - q.\vec{u}\cdot\vec{A}$ que ayuda a obtener las ecuaciones del movimiento de la carga. El Lagrangeano queda:

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}.m.u^2 - q.\Phi + q.\vec{u}\cdot\vec{A}$ $\quad$ $\vec{u}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$, $\dot{x}=dx/dt$, $\dot{y}=dy/dt$, $\dot{z}=dz/dt$

En el capítulo 5 "Mecánica Relativista" veremos la versión relativista de este Lagrangeano.

Ejercicio: Consultar algún material sobre Electromagnetismo o Mecánica y tratar de deducir las ecuaciones de Lagrange a partir de este potencial U_{pot}. En el capítulo 15 "Ejercicios Resueltos" mostramos algunos argumentos para justificar que la parte variable con la velocidad $q.\vec{u}\cdot\vec{A}$ se comporta como un potencial.

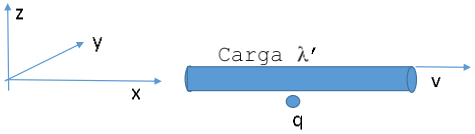
Reconocemos que la estructura matemática de esta cantidad $-q.\Phi + q.\vec{u}\cdot\vec{A}$ se parece bastante a un producto escalar de la cuadrivelocidad con un candidato a "cuadripotencial".

Definimos:	Cuadri-potencial	$\mathcal{A}4 = (\Phi,$	A_x	A_y	$A_z)$
Recordamos:	Cuadri-velocidad	$\mathcal{U}4 = (1,$	u_x	u_y	$u_z)$

El candidato a invariante, en formulación cuadrivectorial, no es el producto escalar exacto. Nos aparece otra vez la aplicación que cambia el signo del producto de las partes temporales respecto a las espaciales:
$U_{pot} = -q. <A4, U4>$

A continuación analizamos, al menos en un caso particular, cómo podrían ser las leyes de transformación de los potenciales $(\Phi, \vec{A}) \leftrightarrow (\Phi', \vec{A'})$ al cambiar de un sistema inercial Σ a otro Σ' también inercial.

Consideramos un cilindro cargado que se mueve a velocidad $\vec{v_o}$ según el eje $\hat{x}$.
En el exterior del cilindro ubicamos cargas de prueba 'q' para explorar los campos electromagnéticos.



Ejercicio: A quienes no recuerden estos resultados de los cursos de Electromagnetismo, los invitamos a repasar los campos y potenciales eléctricos de un cilindro cargado y los campos magnéticos de un cilindro con corriente uniforme. En los ejercicios resueltos del capítulo 15 ofrecemos algunas guías para consulta.

En el referencial solidario al cilindro Σ' las magnitudes son:

$\Phi' = \lambda'/(2\pi\epsilon_o)\log(L/r)$ λ'=carga por unidad de longitud
$\vec{E'} = -\nabla\Phi' = \lambda'/(2\pi\epsilon_o r)\, \vec{e_r}$.
$\vec{A'} = \vec{0}$ $\vec{B'} = 0$.

Utilizamos la aproximación de cilindro infinito. Para minimizar el error introducido necesitamos que la extensión axial del cilindro 'L' sea mucho mayor a las restantes distancias involucradas 'a', 'r' y 'x':
→a=radio del cilindro r=distancia entre el eje del cilindro y las cargas de prueba, r>a
→x=posición axial, cercana al centro del cilindro. Los extremos estarían en x= –L/2 y x=+L/2.

¿Cómo se ve la situación en Σ?
El movimiento relativo con velocidad $\vec{v_o}$ hace que las cargas se perciban como corrientes:

$I_x = \lambda'.v_o$ dividimos por el área transversal del cilindro, $I_x/Area = J_x$
$J_x = \rho'.v_o$. Queda en la forma que ya vimos en la sección 2.1.2
$A_x = \mu_o.I_x/(2\pi).\log(L/r)$ sustituimos $I_x = \lambda'.v_o$
$A_x = \mu_o.\lambda'.v_o/(2\pi).\log(L/r)$
$A_x = \mu_o.\lambda'.v_o/(2\pi).\log(L/r)$ recordamos $\mu_o = 1/(\epsilon_0.c^2)$
$A_x = \lambda'.v_o/(2\pi)/\epsilon_o.c^2.\log(L/r)$
$A_x = v_o/c^2.\lambda'/(2\pi\epsilon_o).\log(L/r)$ reconocemos Φ'
$A_x = v_o/c^2.\Phi'$

Respecto a las fórmulas de pasaje entre Σ y Σ':
Φ=Φ' porque no tenemos todavía argumentos para suponer que haya cambios eléctricos.
El cambio más evidente es el magnético: hay magnetismo en Σ y no en Σ'.

En este caso particular era $\vec{A'}=0$. En un caso general habrá otras fuentes de campo magnético en Σ' y esperamos que los efectos sean aditivos. Enunciamos entonces: $A_x = A'_x + v_o/c^2.\Phi'$
El potencial magnético medido en Σ es suma del medido en Σ' + un adicional creado por las cargas de Σ' que se perciben como corrientes por el movimiento relativo.

Las reglas de transformación para el cuadripotencial son similares a las de otros cuadrivectores: a la componente espacial en el sentido del movimiento se le suma un término proporcional al producto de la componente temporal por la velocidad relativa entre los sistemas. Confirmamos que vamos "*bien rumbeados*" al juntar este escalar Φ y este vector $\vec{A}$ en un objeto de 4 dimensiones.

$\Phi=\Phi'$ $A_x = A'_x + v_o.\Phi'/c^2$ $A_y = A'_y$ $A_z = A'_z$

La fórmula integral de Coulomb permite expresar el potencial vectorial $\vec{A}$ generado por una distribución arbitraria de cargas móviles, con geometría no necesariamente cilíndrica:

$\vec{A}(\vec{r})=\mu_o/(4\pi).\iiint_{Vol} \vec{J}(\vec{r_f})/|\vec{r}-\vec{r_f}|.dVol$ $\quad$ $\vec{r}$=punto de campo, $\vec{r_f}$ =punto fuente

Si todas las cargas de la distribución se mueven a la misma velocidad, se cumple $\vec{J}(\vec{r_f})=\vec{v_o}.\rho(\vec{r_f})\ \ \forall \vec{r_f}$.
La velocidad $\vec{v_o}$ sale fuera de la integral, y al sustituir $\mu_o=1/(\epsilon_o.c^2)$ queda:

$\vec{A}(\vec{r})=\vec{v_o}/c^2.1/(4\pi\epsilon_o).\iiint_{Vol} \rho(\vec{r_f})/|\vec{r}-\vec{r_f}|.dVol$

$\rightarrow \vec{A}=\vec{v_o}/c^2.\Phi'$

Tomamos rotacional a ambos miembros y aplicamos fórmulas del Cálculo Vectorial.
Reconocemos $\vec{E'}=-\nabla\Phi'$ (por ser configuración electrostática), y nos queda: $\rightarrow \vec{B}=\vec{v_o}\wedge\vec{E'}/c^2$

La velocidad de movimiento debe ser baja o moderada $v_o \ll c$ para que esta expresión mantenga su validez.
Para cargas moviéndose en forma muy rápida es necesario contemplar el retardo de propagación entre las fuentes y los efectos percibidos en los puntos de campo. $\vec{A}(\vec{r},t)=\mu_o/(4\pi).\iiint_{Vol} \vec{J}(\vec{r_f},t_f)/|\vec{r}-\vec{r_f}|.dVol$
$t_f=t-|\vec{r}-\vec{r_f}|/c$, es un tiempo retardado diferente para cada punto fuente de la distribución de carga.
Cada elemento de volumen contribuye al potencial en tiempo=t con el valor que tenía un tiempo anterior t_f y desde la ubicación $\vec{r_f}$ en que se encontraba en ese tiempo t_f.
Esta fórmula obtenida de la teoría de los potenciales retardados predice una propagación de información a velocidad 'c' y conduce a los mismos resultados relativistas a los que llegaremos al final de la sección 3.4.

2.1.5 Redefinición de cuadrivectores:

Este potencial cuadridimensional también aparece sugerido en otro contexto electromagnético, relacionado con el margen de libertad que hay en la elección de los potenciales $\vec{A}$ y Φ.
Una pareja de potenciales $\{\Phi,\vec{A}\}$ podría sustituirse por otra $\{\underline{\Phi},\underline{\vec{A}}\}$ que por derivación de lugar a los mismos campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$. El grado de libertad desaparece cuando fijamos una condición de calibre para la divergencia del potencial $\vec{A}$:

$\nabla\cdot\vec{A}=0$ $\quad$ se llama calibre de Coulomb o gauge de Coulomb

$\nabla\cdot\vec{A}+\mathbf{1/c^2}.\partial_t\Phi=0$ $\quad$ se llama calibre de Lorenz o gauge de Lorenz

Una vez que fijamos un calibre, desearíamos conservarlo al pasar de un sistema de referencia Σ a otro Σ'.
En los cursos de Electromagnetismo se enseña que el calibre de Lorenz es el más conveniente para trabajar con ondas electromagnéticas, y es el que vamos a elegir mayormente en este trabajo porque la luz es una onda electromagnética y es un protagonista de la Teoría de la Relatividad.
Curiosidad: Son dos personas diferentes Hendrik Antoon Lorentz (el de la fuerza de Lorentz) y Ludvig Lorenz. (ver cap.14 Autores)

La ecuación de Lorenz tiene el aspecto de un producto escalar entre el operador de derivadas y el cuadrivector potencial.

Cuadri-potencial	$\mathcal{A}4=(\Phi$	A_x	A_y	$A_z)$
cuadri-derivada:	$\partial 4=(\partial_t$	∂_x	∂_y	$\partial_z)$

El problema es que la operación $\partial 4\cdot A4=\nabla\cdot\vec{A}+\partial_t\Phi$, con la definición actual de cuadrivectores, no es la condición de calibre que queremos formular; incluso queda *dimensionalmente incorrecta*.

Es necesario ajustar la escala de la componente temporal de uno o de ambos cuadrivectores.
Nos falta un factor $1/c^2$. Decidimos repartirlo en forma pareja como $1/c$ para cada uno de los cuadrivectores participantes de la ecuación; el argumento que sustenta esta elección es el hecho de que con este re-escalado los cuadrivectores pasan a tener en su parte temporal las mismas unidades que en su parte espacial. Y las celdas de los jacobianos del cambio de referencia $\Sigma\leftrightarrow\Sigma'$ pasan a ser adimensionadas.
Seguimos el mismo criterio para el cuadrivector de derivadas y **redefinimos**:

Cuadri-potencial	$A4=(\Phi/c,$	A_x	A_y	$A_z)$
cuadri-derivada:	$\partial 4=(1/c.\partial_t,$	∂_x	∂_y	$\partial_z)$

La condición de Lorenz tiene la forma que estamos buscando y que ayuda a encontrar invariantes.
Lo que está diciendo es que es nulo el producto escalar $\partial 4 \cdot A4 = 0$, la "*cuadridivergencia*" del "*cuadripotencial*". Si se cumple en Σ debería conservarse al pasar a Σ'.

Para que el término potencial del Lagrangeano también sea expresable en función de los cuadrivectores *A4* y *U4*, debemos realizar el mismo ajuste de escala para la cuadrivelocidad, y redefinir:

cuadri-velocidad:	$U4=(c,$	u_x	u_y	$u_z)$

La cuadrivelocidad *U4* participa junto con *F4* en la ecuación de la potencia y la energía, lo que nos obliga a redefinir también *F4* para que todas sus componentes tengan unidades de fuerza.

cuadri-fuerza:	$F4=(\dot{W}/c,$	f_x	f_y	$f_z)$

Finalmente, el cuadrivector espacio-tiempo también debe ser re-escalado porque se relaciona con la cuadrivelocidad a través de una derivada temporal: $U4=dX4/dt$

espacio-tiempo:	$X4=(c.t,$	x	y	z)

Y la componente $\partial 4[0]$ de la cuadriderivada resulta ser la derivada respecto a la coordenda $X4[0]$.

Reflexión: *En otras publicaciones sobre Relatividad no es necesario dedicar atención a este re-escalado porque se utiliza un sistema de unidades en el que vale c=1.*
En este trabajo invertimos esfuerzo en ajustar los factores de escala porque creemos que tiene un valor conceptual. El solo hecho de que aparezcan factores $1/c^2$ en la condición de calibre de Lorenz o en la ecuación de ondas ($\nabla^2 - 1/c^2.\partial_t^2$) ya nos está dando una pista sobre la importancia de esta velocidad 'c'.
Omitir los factores 'c' nos parece más adecuado para un estudio avanzado de esta disciplina, cuando ya aprendimos la importancia de la constante 'c' y nos *cansamos* de escribirla tantas veces.

2.1.6 Cuadrivector de onda:

Las ondas electromagnéticas, que ya nombramos en varias ocasiones, están asociadas a potenciales y campos con variación armónica de la forma $func(\vec{r},t)= A.e^{j.(\omega.t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$. Identificamos las siguientes cantidades:

$j^2=-1$, j=i es la unidad imaginaria	A=amplitud
$\omega=2\pi.f$=pulsación angular [rad/seg]	f=frecuencia [Hz]
$\vec{k}$=vector de onda, cuyo módulo es $2\pi/\lambda$,	λ=longitud de onda

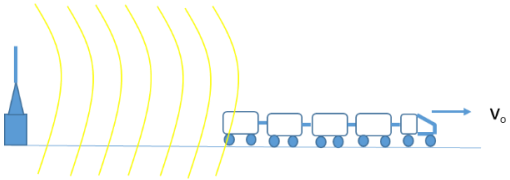
La exponencial compleja se está refiriendo a variaciones armónicas $\cos(\phi)=ParteReal(e^{-j\phi})$,
donde ϕ es el ángulo de fase de la onda $\phi= \vec{k}\cdot \vec{r} - \omega.t$.

Esta fase ϕ tiene alguna de las propiedades que serían esperables de una magnitud invariante.
Si en un cierto instante 't' y posición $\vec{r}$ la onda adquiere su manifestación máxima (ϕ=0 o 2π, cosϕ=1), ese carácter de "máximo local" debería manifestarse también en el sistema Σ' cuando hagamos la descripción según ω', t', $\vec{k}$' y $\vec{r}$'. Lo mismo si ϕ=π/2, cosϕ=0, tendríamos un mínimo local.
La forma matemática de la fase se parece bastante a los productos escalares en 4 dimensiones que estamos empezando a ver. La parte espacial es $\vec{k}\cdot\vec{r}$, y la parte temporal involucra la cuarta componente del cuadrivector tiempo-espacio. Así que formularíamos la primera definición tentativa:

cuadrivector tiempo-espacio:	$X4=(ct$	x	y	z)
cuadrivector de onda:	$K4=(\omega/c$	k_x	k_y	$k_z)$

La expresión cuadrivectorial no es el producto escalar exacto $K4 \cdot X4$ sino $\phi=<K4,X4>$. Por tercera vez nos aparece la forma cuadrática con un signo modificado; ya tenemos abundante evidencia de que esto debe tener un sentido físico.

Igual que en la sección anterior, buscamos si hay alguna dependencia o influencia entre las componentes espaciales y temporales de ***K4*** durante un movimiento relativo.
Algo que justifique reunir las magnitudes ω y $\vec{k}$ dentro de un mismo objeto cuadri-dimensional.
Y nos encontramos con el Efecto Doppler clásico: $\omega' = \omega - k_x.v_o$



Pensemos en un tren que se aleja de la estación a velocidad $\vec{v} = v_o.\vec{x}$.
El radiotransmisor de la estación emite señales a frecuencia 'ω', velocidad de propagación 'c' y $k_x = \omega/c$.
Debido a que el tren se está alejando, la separación temporal entre los máximos de la onda se estira y la frecuencia recibida a bordo del tren disminuye, obteniéndose $\omega' = \omega.(1 - v_o/c) = \omega - v_o.\omega/c = \omega - v_o.k_x$

Ejercicio: Demostrar lo anterior, intersectando la trayectoria del tren $x = v_o.t$ con la trayectoria del n-ésimo frente de onda $x_n(t) = c.(t - n.t_o)$ para n=0,1,2…etc. t_o =período=1/f, f=frecuencia transmitida.
Llamamos t_n a los instantes de intersección.

$x_{tren}(t_n) = x_n(t_n)$
$v_o.t_n = c(t_n - n.t_o)$
$c.n.t_o = (c - v_o).t_n$
$n.t_o = (1 - v_o/c).t_n$
$t_n = n.t_o/(1 - v_o/c)$

Período recibido $T' = t_{n+1} - t_n = t_o/(1 - v_o/c)$
Frecuencia recibida $f' = 1/T'$ → $f' = f.(1 - v_o/c)$

Otra demostración: Vamos en camino de construir una formulación en la que las leyes sean invariantes al pasar de un sistema a otro. Como anticipo de lo potente que resultaría esa formulación, mostramos que se llegaría más rápido a la fórmula del efecto Doppler si aceptamos la invarianza del ángulo de fase.
Para el caso simplificado de propagación solo según-x, tenemos:

$\phi = k_x.x - \omega.t$ →pasamos a Σ' $x = x' + v_o.t'$, $t = t'$, $\phi = \phi'$
$\phi' = k_x.(x' + v_o.t') - \omega.t'$
$\phi' = k_x.x' + k_x.v_o.t' - \omega.t'$ →reordenamos según t', x'.
$\phi' = k_x.x' - (\omega - k_x.v_o).t'$
$\phi' = k'_x.x' - \omega'.t'$

Identificamos como k'_x todo lo que aparece multiplicando a x', y ω' todo lo que multiplica a t'.
→$\omega' = \omega - k_x.v_o$ $k'_x = k_x$

En un caso más general en que la onda tenga desplazamiento en dirección arbitraria, se cumpliría:
$\phi = k_x.x + k_y.y + k_z.z - \omega.t$
Las reglas de transformación al pasar de Σ a Σ' se completarían con $k'_y = k_y$, $k'_z = k_z$
Es decir, $\vec{k}' = \vec{k}$

2.2 Leyes físicas invariantes.

En esta sección enumeramos los cuadrivectores presentados en 2.1, acompañados de las leyes físicas en las que participan y de nuestra propuesta de fórmulas de transformación de componentes al cambiar entre dos referenciales en movimiento relativo. El objetivo es tratar de formular las leyes de una manera invariante.

Cuadrivectores:

tiempo-espacio:	$X4$ = (c.t,	x	y	z)→se abrevia	=(c.t,$\vec{r}$)	.
cuadrivelocidad:	$U4$ = (c,	u_x	u_y	u_z)	= (c,$\vec{u}$)	.
carga-corriente:	$J4$ = (ρ.c,	J_x	J_y	J_z)	= (c.ρ,$\vec{J}$)	.
cuadri-potencial:	$A4$ = (Φ/c,	A_x	A_y	A_z)	= (Φ/c,$\vec{A}$)	.
cuadri-derivada:	$\partial 4$ = (1/c.∂_t,	∂_x	∂_y	∂_z)	= (1/c.∂_t, ∇)	.
cuadri-fuerza:	$F4$ = (Ẇ/c,	f_x	f_y	f_z)	= (Ẇ/c,$\vec{f}$)	.
cuadrivector de onda:	$K4$ = (ω/c,	k_x	k_y	k_z)	= (ω/c,$\vec{k}$)	.

Ecuaciones físicas:

Tema:	Formulación clásica:	Formulación relativista:
Potencia y energía	$\dot{W} = \vec{f} \cdot \vec{u}$	$<F4, U4> = 0$
Conservación de la carga	$\nabla \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0$	$\partial 4 \cdot J4 = 0$
Lagrangeano	$U_{pot} = q.\Phi - q.\vec{u} \cdot \vec{A}$	$U_{pot} = -q. <A4, U4>$
Calibre Lorenz	$\nabla \cdot \vec{A} + 1/c^2.\partial_t \Phi = 0$	$\partial 4 \cdot A4 = 0$
Fase de una onda	$\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega.t$	$\phi = <K4, X4>$

Reglas de transformación:

$X4$	t=t'	x=x' + v_o.t'	y=y'	z=z'
$U4$	c=c'	$u_x = u_x' + v_o$	$u_y = u_y'$	$u_z=u_z'$
$J4$	ρ=ρ'	$J_x=J'_x+v_o.\rho'$	$J_y=J'_y$	$J_z=J'_z$
$A4$	Φ=Φ'	$A_x=A'_x+v_o/c^2.\Phi'$	$A_y=A'_y$	$A_z=A'_z$
$\partial 4$	$\partial_t'=\partial_t+v_o.\partial_x$	$\partial_x'=\partial_x$	$\partial_y'=\partial_y$	$\partial_z'=\partial_z$
$F4$	$\dot{W} = \dot{W}' + v_o.f_x'$	$f_x=f_x'$	$f_y=f_y'$	$f_z=f_z'$
$K4$	$\omega' = \omega - v_o.k_x$	$k_x'=k_x$	$k_y'=k_y$	$k_z'=k_z$

→Lo primero que vemos en común en estas ecuaciones es que en el 100% de los casos las componentes (y,z) transversales al movimiento permanecen inalteradas durante el cambio de referencia; las modificaciones únicamente ocurren en la componente temporal o en la dirección espacial del movimiento.
→También encontramos otro aspecto en común: en los casos en que hay alteración de componentes, esta variación es siempre proporcional a la velocidad relativa v_o entre los sistemas de referencia.
→Donde no hay acuerdo total es en la fórmula exacta de variación: a veces hay cambio en la componente-0 y a veces en la componente-1. Y el signo a veces es positivo y a veces negativo.
→Tampoco están unificados los formatos de ecuación: en algunos casos son productos escalares exactos y en otros casos son productos escalares "generalizados" con un signo modificado.

Al avanzar en este trabajo y buscar formas invariantes para las leyes, comprobaremos que es inconveniente tener múltiples esquemas de variación. Lo deseable es que todos los cuadrivectores se adapten a alguno de los dos esquemas de variación mencionados en la sección 1.5 en relación con el diferencial de línea $d\vec{S}$:

- el esquema llamado covariante, igual que los vectores base
- y el llamado contravariante, igual que los diferenciales de desplazamiento coordenado.

Covariante:	$E'_{ct}\vec{}=E_{ct}\vec{}+v_o/c.\ E_x\vec{}$	$E'_x\vec{}=E_x\vec{}$	$E'_y\vec{}=E_y\vec{}$	$E'_z\vec{}=E_z$
Contravariante:	dt=dt'	dx=dx'+v_o.dt'	dy=dy'	dz=dz'

En ese sentido se destacan los primeros 4 cuadrivectores de la lista, que se comportan como contravariantes. Y el operador de derivadas que se comporta como covariante.
Matricialmente vale:

$[X4]=[Jac].[X4']$
$[U4]=[Jac].[U4']$
$[J4]=[Jac].[J4']$
$[A4]=[Jac].[A4']$
$[\partial'4]=[\partial 4].[Jac]$

2.2.1 Ecuación de continuidad:

La formula clásica es: $\nabla \cdot \vec{J} + \partial\rho/\partial t = 0$.
La formulación relativista es:

Cuadriderivada	$\partial 4 = (1/c.\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$	abreviado (∂_{ct}, ∇)
Combinamos con carga-corriente	$J4=(c\rho, J_x, J_y, J_z)$:	abreviado $(c\rho, \vec{J})$
operamos componente a componente y sumamos	$\partial 4 \cdot J4 = \partial_t\rho + \partial_x J_x + \partial_y J_y + \partial_z J_z = 0$	

Esta es nuestra primera ley física expresada como producto escalar de cuadrivectores.
Tiene exactamente la forma que estamos buscando:

$\partial 4 \cdot J4 = 0$ en Σ $\qquad$ $\partial'4 \cdot J'4 = 0$ en Σ'

La invarianza debería estar asegurada por el carácter opuesto de los factores: uno covariante, el otro contravariante.
Ejercicio: Aplicar las transformaciones vistas para demostrar que se cumple $\partial'4 \cdot J'4 = 0$
Sugerencia: Partir de la ecuación en Σ, expresar $J_x=J'_x+ v_o.\rho'$, hacer aparecer $\partial_t+v_o.\partial_x=\partial_t'$.

Demostración matricial:

$[\partial 4]\cdot[J4]= 0$ →pasamos a Σ' con $[J4]=[Jac].[J'4]$, [vector]=[matriz] $_x$ [vector]
$[\partial 4]\cdot[Jac].[J'4]= 0$
$[\partial 4]\cdot[Jac].[J'4]= 0$ →reconocemos $[\partial'4]= [\partial 4].[Jac]$, visto en 1.4.4
$[\partial'4]\cdot[J'4]= 0$

Observación: La matriz jacobiana [Jac], aunque esté a la derecha del operador ∂, no se ve afectada por las derivadas porque sus coeficientes no dependen de las coordenadas. Esto es algo particular de las coordenadas cartesianas, no se va a mantener en coordenadas curvilíneas.

2.2.2 Potencia y conservación de la energía:

La formula clásica es $\dot{W} = \vec{f} \cdot \vec{u}$
Nuestra propuesta de formulación relativista es:

cuadrivelocidad:	$U4 = (c$	u_x	u_y	$u_z)$
cuadri-fuerza:	$F4 = (\dot{W}/c$	f_x	f_y	$f_z)$

El producto escalar no se adapta en forma exacta para expresar esta ecuación, debemos recurrir a la variante del signo cambiado presentada en la sección anterior:
$<F4,U4> = -F4[0].U4[0] + F4[1].U4[1] + F4[2].U4[2] + F4[3].U4[3]$

La invarianza al alternar entre referenciales inerciales Σ y Σ' ya la demostramos en forma manual, artesanal. Querríamos evitar tener que realizar un esfuerzo particular con cada nuevo cuadrivector y para cada ley de la que forma parte, por eso consideramos deseable que todos los cuadrivectores se amolden a alguno de los dos esquemas de transformación que ya vimos que aseguran la invarianza.
Aquí nos enfrentamos al inconveniente de que la cuaterna de componentes $(\dot{W}/c, \vec{f})$ no parece ajustarse a ninguno de los modelos de varianza planteados en 1.5.2; no sigue en forma exacta las reglas de transformación covariante ni contravariante.

$\dot{W}=\dot{W}'+v_o.f_x'$ →*el movimiento altera la componente temporal-0 en vez de la espacial-x*

$f_x=f_x'$ $f_y=f_y'$ $f_z=f_z'$

Podemos resolver el inconveniente si **definimos una versión alternativa del cuadrivector potencia-fuerza con su componente-0 negada**.

Por el momento la diferenciamos de la versión principal escribiendo el "4" como un subíndice, F_4 en lugar de $F4$; luego en el capítulo 4 utilizaremos una notación más difundida llamada notación tensorial.

cuadrifuerza, forma principal=$F4$: $(+\dot{W}/c,\ f_x,\ f_y,\ f_z)$

cuadrifuerza, forma alternativa=F_4 : $(-\dot{W}/c,\ f_x,\ f_y,\ f_z)$

Aceptamos ese signo negativo, aunque mantenemos ciertos reparos de construir una teoría con magnitudes negadas porque puede causar dificultad recordar cuándo y dónde deben ubicarse los signos.

Con esta definición de F_4, reordenamos términos de $\dot{W}=\dot{W}'+v_o.f_x$ y llegamos a $\mathbf{-\dot{W}' = -\dot{W} + v_o.f_x}$

Ahora los dos cuadrivectores encajan perfectamente dentro de los esquemas de varianza establecidos, uno de ellos se transforma como los vectores base y el otro como los diferenciales de coordenadas:

Transformación covariante →como los vectores base:

$\vec{E'_t}=\vec{E_t}+v_o.\vec{E_x}$	$\vec{E'_x}=\vec{E_x}$	$\vec{E'_y}=\vec{E_y}$	$\vec{E'_z}=\vec{E_z}$
$-\dot{W}'=-\dot{W}+v_o.f_x$	$f_x'=f_x$	$f_y'=f_y$	$f_z'=f_z$

Transformación contravariante →como los diferenciales de coordenada:

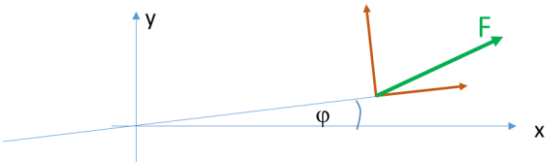
$dt=dt'$	$dx=dx'+v_o.dt'$	$dy=dy'$	$dz=dz'$
$1=1$	$u_x=u_x'+v_o.1$	$u_y=u_y'$	$u_z=u_z'$

Salvando la rareza del signo negativo, tenemos nuestra segunda ecuación cuadrivectorial $F_4 \cdot U4 = 0$ en forma de producto escalar. La varianza opuesta de los factores asegura que al cambiar a otro referencial Σ' la ecuación va a mantener su forma exacta. También deberá verificarse $F'_4 \cdot U'4 = 0$

Ejercicio "avanzado": Pasar a coordenadas cilíndricas y ver que esta ecuación resiste el cambio sin perder la forma matemática $F'_4 \cdot U'4=0$. *Advertencia: nos estamos adelantando 3 o más capítulos*.

Algunas guías: Las transformaciones de coordenadas son t=t', x=r.cosφ, y=r.senφ, z=z'.

Las velocidades son $U4=(c,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ y $U'4=(c,\dot{r},\dot{\varphi},\dot{z})$. La esencia de la demostración es ver que las fuerzas se convierten como $F_r=F_x.\cos\varphi + F_y.\text{sen}\varphi$, $F_\varphi=r.(-F_x.\text{sen}\varphi + F_y.\cos\varphi)$.



2.2.3 Condición de calibre Lorenz:

La fórmula clásica es: $\nabla \cdot \vec{A} + 1/c^2.\partial\Phi/\partial t = 0$.

La formulación relativista es:

Cuadriderivada $\partial 4 = (1/c.\partial_t, \partial_x, \partial_y\ \partial_z)$: abreviado (∂_{ct}, ∇)

Cuadrivector potencial $A4=(\Phi/c, A_x, A_y, A_z)$: abreviado $(\Phi/c, \vec{A})$

operamos componente a componente y sumamos $\partial 4 \cdot A4 = 1/c^2.\partial_t\Phi + \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z = 0$

El producto escalar cuadrivectorial se expresa como:

$\partial 4 \cdot A4 = 0$ en Σ $\qquad$ $\partial' 4 \cdot A' 4 = 0$ en Σ'

Las reglas de pasaje de Σ a Σ', deducidas para el escenario del cilindro móvil, son:

$\Phi=\Phi'$ $\qquad$ $A_x=A'_x+v_o/c^2.\Phi$ $\qquad$ $A_y=A'_y$ $\qquad$ $A_z=A'_z$

Se corresponden con las de otros cuadrivectores contravariantes, de varianza opuesta a la cuadriderivada. Lo que asegura la invarianza de las ecuaciones en que participa este cuadrivector, como la condición de calibre de Lorenz. Las operaciones son iguales que en el caso de la ecuación de continuidad; la ventaja de trabajar con solo dos esquemas de varianza es que no debemos repetir cada vez los mismos cálculos.

2.2.4 Ángulo de fase invariante:

La formula clásica es: $\phi = k^{\rightarrow} \cdot r^{\rightarrow} - \omega.t$

La propuesta de formulación relativista es:

posición (espacio-tiempo):	$X4 = (ct$	x	y	$z)$
cuadrivector de onda:	$K4 = (\omega/c$	k_x	k_y	$k_z)$

Nos enfrentamos a los mismos dos inconvenientes que en 2.2.2 con la cuadrifuerza.
Por un lado, al intentar expresar la fase invariante como un producto escalar no se cumple $\phi = K4 \cdot X4$.
Otra vez tenemos una discordancia en el signo de la parte temporal. A igual problema, igual solución.
Recurrimos al producto escalar con el signo modificado:

$$\phi = <K4, X4> = -K4[0].X4[0] + K4[1].X4[1] + K4[2].X4[2] + K4[3].X4[3]$$

Por otro lado, las relaciones de transformación de la cuaterna (ω, k_x, k_y, k_z) no se corresponden con ninguno de los esquemas de varianza conocidos para construir invariantes. Volvemos a encontrar variación en la parte temporal en lugar de la espacial.

$$\omega' = \omega - v_o.k_x \qquad k'_x = k_x \qquad k'_y = k_y \qquad k'_z = k_z$$

Repetimos la estrategia de definir una versión alternativa con la componente temporal de signo negado:

cuadrivector de onda, forma principal:	$K4 = (+\omega/c$	k_x	k_y	$k_z)$
cuadrivector de onda, forma alternativa:	$K_4 = (-\omega/c$	k_x	k_y	$k_z)$

Aquí al menos podemos encontrarle un sentido inmediato al signo negativo, si nos inspiramos en un resultado matemático utilizado en Mecánica Cuántica y Electromagnetismo.
Para campos y potenciales con variación armónica $f(x,y,z,t) = e^{j.(\omega.t - k_x.x - k_y.y - k_z.z)}$ encontramos que derivar respecto al tiempo es lo mismo que multiplicar por jω: $\partial_t f = j\omega.f$, lo que nos conduce a la asociación $\partial_t \rightarrow j\omega$
De igual manera, derivar respecto a 'x' es multiplicar por $-jk_x$, $\partial_x f = -jk_x.f$

Las asociaciones son $\partial_x \rightarrow -j.k_x$, $\partial_y \rightarrow -j.k_y$, $\partial_z \rightarrow -j.k_z$, resumidas en: $\nabla \rightarrow -jk^{\rightarrow}$
Entonces tenemos $j.\partial_t \rightarrow -\omega$, $j.\nabla \rightarrow k^{\rightarrow}$ → $j.\partial 4 \rightarrow K_4$

Aceptamos el signo negativo, con los mismos reparos observados en 2.2.2 respecto al riesgo de confundirnos o equivocarnos. Las relaciones de transformación quedan:

$$-\omega' = -\omega + v_o.k_x \qquad k'_x = k_x \qquad k'_y = k_y \qquad k'_z = k_z$$
$$\partial_t' = \partial_t + v_o.\partial_x \qquad \partial_x' = \partial_x \qquad \partial_y' = \partial_y \qquad \partial_z' = \partial_z$$

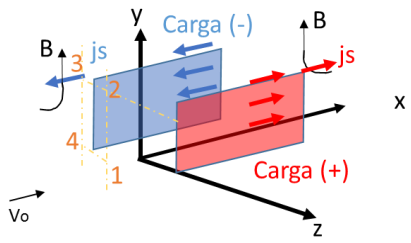
Son exactamente iguales a las del gradiente, gracias a la rareza de haber definido la componente-0 del cuadrivector de onda como la frecuencia negada –ω. Para la invarianza del ángulo de fase $\phi = K_4 \cdot X4$ precisamos que esta versión alternativa K_4 se comporte como covariante, y en principio la condición parecería que se está cumpliendo.

2.3 “Ruptura” con la Física Clásica.

En la sección 2.2 incorporamos a la formulación cuadrivectorial las leyes más básicas de la Mecánica y del Electromagnetismo. Hasta el momento todo anduvo bien, pero cuando querramos unir estas dos disciplinas veremos que nos enfrentamos a problemas de incompatibilidad.

2.3.1 Transformación de fuerzas entre Σ y Σ’:

Pensemos en el siguiente escenario:



En un laboratorio móvil Σ’ se aceleran cargas ‘q’ por medio de un condensador de placas paralelas.
El plano z= –b/2 dibujado en azul tiene carga negativa, el plano rojo z=+b/2 está cargado positivamente.
El campo eléctrico apunta según la dirección ‘–z’ transversal a las placas, no hay fuerza longitudinal en Σ’.
Σ’ se mueve respecto a Σ con velocidad $\vec{v_o}=v_o.\hat{x}$.

En el referencial Σ se ven placas cargadas en movimiento que transportan corriente eléctrica.
Cada placa móvil (corriente) crea su propio campo magnético.
Al ser corrientes de signo opuesto sus efectos se cancelan en la mayor parte del espacio, *pero no en la región interior de las placas donde los efectos se refuerzan y se forma un campo magnético neto*.
Según lo enunciado en 2.1.4 tendríamos un $\vec{B} = \vec{v_o} \wedge \vec{E}/c^2$ orientado según el eje $\vec{y}$ de la figura.
Ejercicio: Demostrar que el campo magnético creado por cada una de las placas móviles es $\mu_o.j_S/2$, siendo $j_S=\sigma.v_o$ la densidad superficial de corriente (corriente por unidad de longitud). El factor $1/c^2$ aparece al sustituir $\mu_o=1/(\epsilon_o c^2)$. Recomendamos suponer placas muy grandes, aproximadas como “plano infinito”.

Las cargas aceleradas por el campo eléctrico adquieren movimiento u_z según ‘–$\hat{z}$’ (de la placa roja+ hacia la placa azul–) y experimentan en el referencial Σ una fuerza magnética $\vec{f_{mag}} = q.\vec{u} \wedge \vec{B}$.
$\vec{u}$ apunta según -$\hat{z}$, $\vec{B}$ es según $\hat{y}$ →el resultado es una $\vec{f_x}$ dirigida en el sentido del movimiento, y que sin embargo no produce acelaración según-x (la partícula conserva $u_x=v_o$=constante).

Se pierde la igualdad **$f_x’=f_x$,** y también **$f_x=m.du_x/dt$** → llegamos a un **punto de ruptura** con la Física Clásica de Newton y Galileo porque no tenemos argumentos para explicar esta diferencia de fuerzas.
Recordamos nuestra hipótesis original: los sistemas se mueven a velocidad uniforme uno del otro, no debería haber fuerzas *de inercia*.
Se plantean varios interrogantes: ¿Hay un error en las ecuaciones del Electromagnetismo, o en el hecho de querer aplicar las mismas fórmulas a ambos referenciales? ¿O por el contrario, el Electromagnetismo nos está sugiriendo un comportamiento que deberían tener también las otras fuerzas de otros orígenes?

2.3.2 Lagrangeano de una partícula cargada:

Miramos con más detalle el Lagrangeano de una partícula cargada en presencia de campos eléctricos y magnéticos: $\mathcal{L} = ½.m.u^2 – q.\Phi + q.\vec{u} \cdot \vec{A}$.
El potencial dependiente de la velocidad es $U_{pot} = q.\Phi – q.\vec{u} \cdot \vec{A}$.
Se parece mucho a un producto escalar. Pero su forma matemática exacta es la aplicación que resta en vez de sumar el producto de términos temporales, como ya vimos en el caso de $\phi=\langle K4, X4\rangle$ y $\langle F4, U4\rangle=0$.

$$-U_{pot}/q = \langle A4, U4\rangle = -A4[0].U4[0] + A4[1].U4[1] + A4[2].U4[2] + A4[3].U4[3]$$

Al pasar a otro referencial Σ' deberíamos mantener las mismas ecuaciones y el mismo Lagrangeano.
Los términos que no contienen a la carga eléctrica 'q' son cinéticos, $\dot{x}^2$ se convierte en $\dot{x}'^2 + 2.v_o.\dot{x}' + v_o^2$.
En los próximos capítulos veremos más detalles sobre la dinámica lagrangeana y comprobaremos que los términos agregados no modifican las ecuaciones de movimiento $p_x'=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}'$ $dp_x'/dt'=\partial\mathcal{L}/\partial x' + f_x'$.

Los términos que contienen a la carga 'q' deben ser interpretables como el potencial dependiente de la velocidad en el nuevo referencial Σ' y deben responder al mismo formato $q.(\Phi' - u'^{\rightarrow} \cdot A'^{\rightarrow})$.

$U_{pot} = q.\Phi - q.\vec{u} \cdot \vec{A}$ →pasamos a Σ' con $\vec{u} = \vec{v_o} + \vec{u'}$
$U_{pot} = q.\Phi - q.(\vec{v_o} + \vec{u'}) \cdot \vec{A}$
$U_{pot} = q.\Phi - q.(\vec{v_o} \cdot \vec{A}) - q.\vec{u'} \cdot \vec{A}$ →agrupamos según $u'^{\rightarrow}$
$U_{pot} = q.(\Phi - \vec{v_o} \cdot \vec{A}) - q.\vec{u'} \cdot \vec{A}$
$U_{pot} = q.\Phi' - q.\vec{u'} \cdot \vec{A'}$

Llamamos $A'^{\rightarrow}$ a todo lo que multiplica escalarmente a $u'^{\rightarrow}$, y Φ' al potencial por unidad de carga cuando la carga está en reposo con $u'^{\rightarrow}=0$.
La invarianza de esta cantidad $U_{pot}=U'_{pot}$ requiere $\Phi'=\Phi - \vec{v_o} \cdot \vec{A}$ $\vec{A'}=\vec{A}$

Esto entra en conflicto con las leyes de transformación deducidas en el ejemplo del cilindro 2.1.4 y que eran compatibles con la invarianza del calibre Lorenz.

Podemos convivir con versiones distintas de cuadrivectores, que difieran en algún factor de escala o en un signo + o – en su componente temporal. Por ejemplo:

$\mathcal{A}_4=(\Phi/c,\vec{A})$: forma principal $\mathcal{A}_4=(-\Phi/c,\vec{A})$: forma alternativa

Podemos también aceptar que ciertos signos o factores de escala aparezcan en la generalización de los productos escalares. Pero cuesta aceptar que las fórmulas de transformación de componentes deban adaptarse a la ley que queremos hacer invariante.

$\Phi'=\Phi - \vec{v_o} \cdot \vec{A}$ $\vec{A'}=\vec{A}$ →para el Lagrangeano
$\Phi'=\Phi$ $\vec{A'}=\vec{A} - \vec{v_o}/c^2.\Phi$ →para el calibre Lorenz

Son las mismas magnitudes físicas $\Phi,\vec{A}$ y debería corresponderles una única regla de transformación.
El hecho de no poder unificar las reglas de transformación es otro indicador de ruptura, testigo de que hay aspectos incompletos en la antigua Física Clásica y también en nuestra nueva teoría que estamos elaborando.

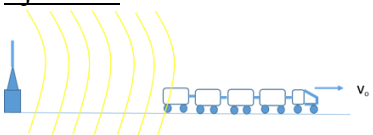
2.3.3 Ecuación de ondas:

Analizamos ahora un detalle que es más grave que la incomodidad referida en 2.2 respecto a tener que negar el signo de una componente de un cuadrivector o de un sumando del producto escalar sin entender plenamente la razón.
Para que haya soluciones de onda armónica $e^{j.(\omega.t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$, los campos o potenciales involucrados deben satisfacer una ecuación diferencial llamada ecuación de ondas de vacío:

$\nabla^2\vec{A} - 1/c^2.\partial_t^2\vec{A} = 0$ $\nabla^2\Phi - 1/c^2.\partial_t^2\Phi = 0$

Este operador diferencial largo, aplicado a Φ y a $\vec{A}$, se llama d'Alembertiano.
Esta ecuación de ondas basada en este operador ***no es invariante*** al pasar del sistema Σ a Σ', si aplicamos las fórmulas de 2.1.3 que tenemos hasta el momento para convertir los operadores de derivación: $\partial'_t=\partial_t+\vec{v_o}\cdot\nabla$ y $\nabla'=\nabla$.

Ejercicio: Demostrar lo anterior y ver que aparecen términos parásitos del orden de v_o/c o v_o^2/c^2.



Tomamos como punto de partida el referencial de la estación Σ, donde se emite una onda electromagnética que viaja a velocidad 'c' y satisface la ecuación de ondas $(\nabla^2 - 1/c^2.\partial_t^2)=0$

$\nabla^2 - 1/c^2.\partial_t^2 =$

$= \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - 1/c^2.\partial_t^2$ → sustituimos 2.1.3: $\partial_t = \partial'_t - v_o.\partial'_x$, $\partial_x = \partial'_x$, $\partial_y = \partial'_y$, $\partial_z = \partial'_z$

$= \partial'_x{}^2 + \partial'_y{}^2 + \partial'_z{}^2 - 1/c^2.(\partial'_t - v_o.\partial'_x)^2$ → expandimos

$= \partial'_x{}^2 + \partial'_y{}^2 + \partial'_z{}^2 - 1/c^2.(\partial'_t{}^2 - 2.v_o.\partial'_x\partial'_t + v_o^2.\partial'_x{}^2)$

$= (1 - \mathbf{v_o^2/c^2}).\partial'_x{}^2 + \partial'_y{}^2 + \partial'_z{}^2 - 1/c^2.\partial'_t{}^2 + \mathbf{2.v_o/c^2}.\partial'_x\partial'_t$

$\neq \nabla'^2 - 1/c^2.\partial'_t{}^2$

En el referencial del tren Σ' seguiríamos teniendo funciones de onda armónica $e^{j.(\omega'.t' - k'^{\rightarrow}.r'^{\rightarrow})}$ para la descripción de los potenciales y campos, pero la relación ω' vs. k' (y por lo tanto la velocidad de propagación c'=ω'/k') sería consistente con **otra ecuación de ondas diferente**.

Según nuestras ecuaciones actuales de transformación, la onda electromagnética se vería desde el tren Σ' como si viajara a velocidad $|c'|=c-v_o$ o $|c'|=c+v_o$ según si el tren se aleja o se acerca en relación al transmisor.

Esta velocidad variable c'≠c tiene sentido para ondas acústicas en un medio material, o para olas en un estanque hidráulico.

Pero en el caso de las ondas electromagnéticas entraría en conflicto con las ecuaciones de Maxwell, que predicen una velocidad de la luz 'c' según la fórmula $c^2=1/(\mu_o.\epsilon_o)$

μ_o =permeabilidad magnética del vacío ϵ_o =permitividad eléctrica del vacío

Las ecuaciones de Maxwell solo contemplan una forma de que varíe la velocidad de las ondas, cuando se sustituye el vacío por otro medio material con distinta permeabilidad μ y permitividad ϵ. En el vacío (***¿ausencia de medio material?***) no debería haber cambios por movimiento relativo entre emisor y receptor, o por saltar de un sistema de referencia a otro.

2.3.4 El éter luminífero:

Hay razones históricas para resaltar y cuestionar el concepto de **¿vacío = ausencia de medio material?**

A fines del siglo XIX existían modelos físicos que suponían que el espacio interestelar no podía ser vacío puro, debía estar lleno de una sustancia sutil, casi intangible. Suficientemente ligera como para no amortiguar las órbitas planetarias (al menos no en forma apreciable durante los siglos en que la Humanidad viene tomando medidas). Pero mínimamente "material" como para permitir la propagación de luz y de radioondas, porque no se concebía la posibilidad de ondas sin ningún medio material que actuara como intermediario o sostén físico. A esa sustancia "etérea" y sutil se la llamó ÉTER (en inglés "*luminipherous aether o ether"*).

De acuerdo con estas teorías, las ondas electromagnéticas se corresponderían con vibraciones de esa sustancia etérea. Con la consecuencia de que habría un sistema privilegiado absoluto, el único en el que se cumplirían en forma exacta las ecuaciones de Maxwell: aquel que se encontrara en reposo respecto al éter. Aplicar las ecuaciones de Maxwell a otros sistemas en movimiento respecto al éter se suponía que debía requerir ciertas correcciones.

Se realizaron distintos estudios y experimentos en un intento de establecer un modelo de éter satisfactorio, y los resultados fueron mayormente contradictorios o desconcertantes.

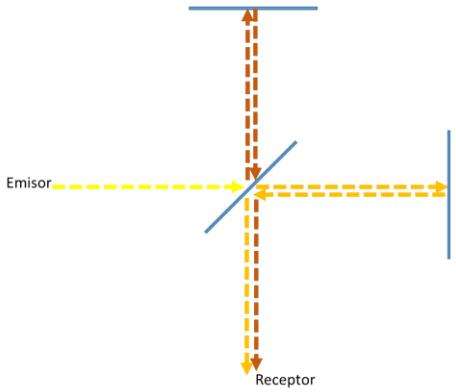
En este trabajo mencionaremos brevemente 3 de ellos: el interferómetro de Michelson-Morley, la aberración de la luz estelar y la velocidad de propagación en fluidos en movimiento. Para más detalles se puede visitar la página [https://www.youtube.com/watch?v=Cjh4HrIK2bA] [Sergio Montañez].

Experimento de Michelson-Morley:

Uno de tales experimentos fue realizado en 1887 por Michelson y Morley. Invitamos a consultar la fuente https://es.wikipedia.org/wiki/Experimento_de_Michelson_y_Morley.

Se utilizaban conceptos de interferometría para intentar detectar a través de patrones de interferencia la velocidad de movimiento de la Tierra a través del éter.

La siguiente figura recrea en líneas generales la idea del experimento.



La luz emitida es dividida en dos haces mediante un espejo semi-transparente orientado a 45 grados. Ambos haces (dibujados respectivamente con color naranja y marrón en la figura) son forzados a recorrer un camino diferente, y luego se unen en la pantalla receptora.
Bajo la hipótesis de que la Tierra orbita a través del éter, se espera que haya una corriente de éter o viento de éter en nuestro sistema de referencia terrestre en el cual está ubicado el laboratorio (que frenaría o aceleraría nuestros rayos de luz).
Si alguno de los brazos (horizontal o vertical) está alineado con esa corriente de éter, la velocidad de propagación debería modificarse →y eso tendría que repercutir en un cambio en la fase de la onda, visualizable a través de un patrón de franjas de interferencia. También debería observarse que el patrón varía al rotar toda la estructura del interferómetro.
No se obtuvieron los resultados esperados; se comprobó que la luz viajaba a velocidad 'c' por ambos brazos, en cualquier dirección y en cualquier sentido (izquierda/derecha, adelante/atrás), *como si la Tierra fuera el sistema privilegiado*. Esta ausencia de resultados causó confusión en la época, y recién años después surgió una explicación satisfactoria en el marco de la Relatividad Especial: abandonar la idea de sistema absoluto y abrazar el concepto de **relatividad**, como indica el nombre de la teoría.

Aberración de la luz estelar:
Desde hace varios siglos los astrónomos observaron que para captar la luz de una estrella remota debían inclinar los telescopios con una inclinación levemente diferente de la que correspondería a la posición de la estrella en el cielo. La desviación angular medida es del orden de $d\theta \approx v/c$, siendo v=velocidad orbital de la Tierra (≈ 29km/seg) y c=velocidad de la luz.

Invitamos a consultar la historia y los detalles asociados a este fenómeno:
https://es.wikipedia.org/wiki/Aberraci%C3%B3n_de_la_luz.

En líneas generales, el resultado experimental sugería que la luz viaja vectorialmente con velocidad $\vec{c}$ en el sistema de referencia de las estrellas (nuestro Sol y la estrella observada); ese sería el sistema privilegiado. En la Tierra, por el contrario, la velocidad relativa sería $\vec{c}-\vec{v}$ →la Tierra no sería entonces un referencial privilegiado, esto contradice los resultados de Michelson-Morley.

Fluidos en movimiento:
Finalmente, mencionamos una tercera línea de investigación llevada a cabo por varios científicos, entre ellos Fizeau. Fuente en https://es.wikipedia.org/wiki/Experimento_de_Fizeau.

Se dispone de un fluido con índice de refracción 'n', lo que implica que en reposo la velocidad de propagación de la luz es u=±c/n.
Luego se bombea al fluido para que circule por la cañería a velocidad 'v', y mediante técnicas de interferometría similares a las descritas en páginas recientes se intenta medir la velocidad de propagación de la luz.
Si el laboratorio resulta ser el referencial privilegiado en el que se cumplen exactamente las ecuaciones de Maxwell (como ocurrió en el experimento de Michelson-Morley), se esperaría medir lo siguiente:

u=c/n cuando la luz viaja a favor del fluido.
u=–c/n cuando la luz viaja en contra del fluido.

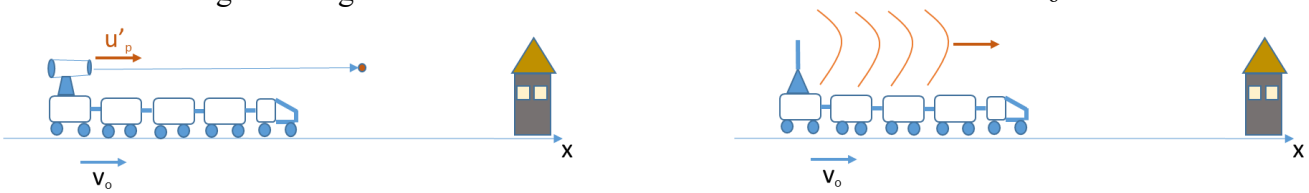
Por el contrario, si el referencial privilegiado resulta ser el solidario al fluido Σ', entonces tendríamos u'=±c/n. Esperaríamos medir u=c/n+v o u=–c/n+v, según si la luz viaja a favor o en contra del flujo.
Los experimentos de Fizeau no concordaban con ninguna de las hipótesis barajadas. Los resultados eran:

$u=c/n+v.(1-1/n^2)$ luz a favor del flujo
$u=-c/n+v.(1-1/n^2)$ luz en contra del flujo

Se buscaron explicaciones basadas en el concepto del "*arrastre parcial de éter*" ("*aether drag*" en inglés), pero no se llegó a un acuerdo a nivel de la comunidad científica.
En la sección 4.3.1 veremos la fórmula de adición relativista de velocidades compatible con estas mediciones experimentales del siglo XIX.

2.3.5 Velocidad de la luz:

La "constancia de la velocidad de la luz" (mismo valor universal 'c' en Σ y en Σ') podría utilizarse como base para construir toda la Relatividad Especial. En nuestros próximos capítulos seguiremos un enfoque algo diferente, analizando distintos aspectos del Electromagnetismo y no solo aquellos relacionados con la velocidad de la luz. Consideramos que sería una buena complementación, para quien tenga interés, leer luego de nuestro capítulo 4 o 5 algún material adicional donde se deduzcan las fórmulas de la Relatividad Especial a partir del postulado de constancia de la velocidad de la luz.
¿A qué nos referimos con esa constancia?
Analicemos la siguiente figura donde un tren se acerca a la estación a velocidad v_o.



En la imagen izquierda se disparan proyectiles con velocidad u'_p relativa al tren, y se espera que sean medidos en la estación como si llegaran con la suma de velocidades $u_p = v_o + u'_p$ según los conceptos clásicos pre-relativistas. (*Ignoremos por el momento la fricción del aire y la gravedad*).
En la imagen derecha se emite radiación electromagnética, que de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell debería propagarse a velocidad 'c' hasta llegar a la estación, incluso si el radiador se mueve.
El problema se puede analizar con la teoría de los potenciales retardados (derivados de las ecuaciones de Maxwell). Se estudiaría una antena móvil y se concluiría que la onda electromagnética llega a la estación (fija en Σ) con frecuencia alterada por efecto Doppler, pero con velocidad de propagación $u_p=c$ acorde al medio en que viaja la onda.

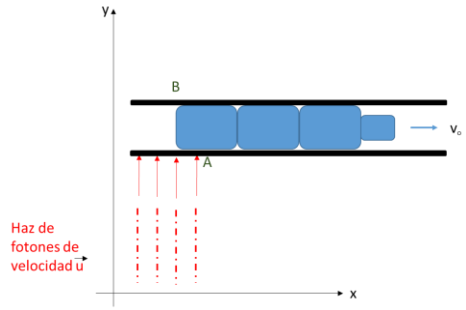
La hipótesis de constancia de la velocidad de la luz implica tratar al sistema móvil Σ' en un pie de igualdad que al Σ (no hay sistema privilegiado). La onda sería emitida con $u'_p = c$ en Σ', y también viajaría con velocidad 'c' vista desde Σ: *no se cumpliría la adición galileana de velocidades*.

Por otro lado, el escenario izquierdo de los proyectiles en el límite en que $u'_p \to c$ debería armonizar con los modelos corpusculares que tratan a la luz como un conjunto de partículas energéticas llamadas fotones.
Lo que implica que para las partículas físicas tampoco se debería cumplir en forma exacta la suma galileana de velocidades. Nuestra Relatividad Especial deberá encontrar una compatibilidad entre ambos escenarios, introduciendo ciertas modificaciones en la fórmula de adición de velocidades:

- $u_p = \text{func}(v_o, u'_p) \neq v_o + u'_p$ func=función de adición relativista, por ahora incógnita
- En el límite clásico de las bajas velocidades $v_o \ll c \to \text{func}(v_o, u'_p) \approx v_o + u'_p$
- En el límite relativista $|u'_p| \to |c|$, también valdría $|u_p| \to |c|$. Es decir: $\text{func}(v_o, c) = c$ y $\text{func}(v_o, -c) = -c$.

Reconocemos que es difícil aceptar esta hipótesis de Einstein sobre la constancia de la velocidad de la luz. Nos preguntamos entonces ¿qué alternativas tendríamos? Una posibilidad es seguir aferrados a la adición galileana de velocidades, lo que requeriría $u'_p = c - v_o$ en el referencial del tren.
Σ sería un sistema privilegiado por estar en reposo respecto al éter, y cualquier "rareza" vista en Σ' debería ser modelable mediante ese supuesto éter: como el hecho de intentar emitir una onda electromagnética y que viaje en Σ' con velocidad $c - v_o$ como si fuera "frenada" por el "viento de éter" percibido en Σ'.

Sin embargo, veremos que también es difícil seguir aferrados a las fórmulas de Galileo.
Volvemos al tren de 2.3.3, pero ahora suponemos que atraviesa en forma perpendicular una transmisión de ondas electromagnéticas. Y modelamos a las ondas como un conjunto de fotones a velocidad $\vec{u} = c.\hat{y}$.
Curiosidad: Si la luz proviene de una estrella remota y en lugar del tren tenemos a nuestra Tierra, estaríamos frente a los experimentos astronómicos de "aberración de la luz" relatados en la sección anterior.



Un fotón (rojo en la figura) ingresa al tren por el punto 'A'. Cuando lo termina de atravesar, sale por el punto 'B', que estaba ubicado levemente hacia la izquierda, porque el tren se movió durante ese intervalo de tiempo y ese punto 'B' se interpone ahora en su trayectoria. Es decir, la trayectoria de la onda debería verse en el referencial móvil Σ' con un ángulo de inclinación θ tal que $tg(\theta) = v_o/c$. Esto es plenamente compatible con la adición galileana de velocidades $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v_o}$, en este caso $\vec{u}' = c.\hat{y} - v_o.\hat{x}$.
Sin embargo, en 2.1.6 aplicábamos las fórmulas galileanas para transformar el ángulo de fase 'ϕ' y el cuadrivector de onda *K4*, obteniendo $\omega' = \omega - k_x.v_o$, **$\vec{k}' = \vec{k}$**. La parte espacial $\vec{k}$, o sea el vector de onda, indica la dirección de propagación de la energía.
La misma Transformación de Galileo predice dos resultados contradictorios:

- aplicada a las coordenadas {t,x,y,z} y al modelo ondulatorio →la onda no se inclina en Σ' porque los vectores de onda se conservan $\vec{k}' = \vec{k}$.
- aplicada a las velocidades vectoriales de los fotones y al modelo corpuscular: → la onda sí se inclina vista en Σ'.

Este es un indicio de que debemos seguir explorando alternativas.

2.3.6 Anticipo métrico:

En más de una ocasión adelantamos en este capítulo que los productos escalares "raros" con el signo negado tenían una interpretación métrica. Intentaremos ver más detalles sobre este aspecto.
Recordamos la definición del ángulo de fase $\phi=<K4,X4>$, que sospechamos que debe ser un invariante $\phi=\phi'$ al pasar al otro referencial $\phi'=<K'4,X'4>$.
Si todas las parejas de cuadrivectores deben adaptarse a esta regla, esperaríamos que también fueran invariantes las aplicaciones que resultan de operar dos veces con el mismo vector: $<K4,K4>$ o $<X4,X4>$.

En las formas cuadráticas, cuando se opera un vector consigo mismo tenemos definida una especie de norma o métrica. Para el cuadrivector espacio-tiempo esta "norma generalizada" sería:
$<X4,X4> = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$
La parte espacial es la métrica euclídea conocida, lo novedoso es que se reste el cuadrado de la parte temporal. Todavía no disponemos de argumentos para evaluar el significado físico que tendría la invarianza de una norma con estas características.

En el caso del cuadrivector de onda, sí le podemos encontrar una interpretación. Su norma quedaría:
$<K4,K4> = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \omega^2/c^2$ (suma de cuadrados espaciales – cuadrado temporal)
Esta cantidad es nula en el referencial Σ donde se propaga la onda porque $\omega=c.k_x$.
Si aceptamos como postulado que esta aplicación $<M4,N4>$ debe ser invariante al cambiar de referencial, cualquiera sea la pareja de cuadrivectores $M4,N4$ que elegimos ubicar dentro de los paréntesis triangulares, entonces en el otro sistema Σ' solidario al tren también tendría que ser nula la norma del cuadrivector de onda. Es decir, se cumpliría $\omega'=c.k'_x$ y la velocidad de fase de la onda ω'/k' sería la misma constante universal 'c' en ambos referenciales.
→Advertimos que las fórmulas desarrolladas hasta el momento son incompatibles con este requerimiento.

Por otro lado, la ecuación de ondas también puede interpretarse en términos de la norma de un operador diferencial. Si utilizamos el símbolo "*caja*" □ para la cuadriderivada, con el factor de escala 1/c en la parte temporal, tendríamos:

$\square = (1/c.\partial_t, \nabla)$ $<\square,\square> = \nabla^2 - 1/c^2.\partial_t^2$

Este operador de ondas llamado d'Alembertiano lo anotaremos $\square^2$ a lo largo de este trabajo.
El exponente '2' actúa como recordatorio de que el operador involucra derivadas de segundo orden, aunque estrictamente no es el cuadrado al estilo del producto escalar "$\square \cdot \square$" sino la norma "rara" $<\square,\square>$ donde el término temporal resta en vez de sumar.

Este operador permite formular la ecuación de ondas de vacío como: $\square^2\Phi=0$ $\square^2\vec{A}=0$
La invarianza requeriría que el d'Alembertiano fuera invariante al alternar entre Σ y Σ', pero esa condición no se está cumpliendo con nuestras fórmulas actuales (2.1.3) para la transformación de las componentes.

Si se cumpliera la invarianza del d'Alembertiano, se estaría avanzando fuertemente hacia la invarianza de las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones de ondas con fuentes $\square^2\Phi= -\rho/\epsilon_o$, $\square^2\vec{A}=-\mu_o\vec{J}$ se podrían condensar en una única expresión cuadrivectorial $\square^2 A4=-\mu_o J4$. Pasaríamos a Σ' convirtiendo ambos cuadrivectores con el mismo jacobiano, y tendríamos la ecuación de ondas con fuentes en el nuevo referencial.

La diferencia de fuerzas en el sentido de un movimiento y el hecho de no poder lograr una invarianza en la ecuación de ondas son dos fenómenos que nos enfrentan a puntos de ruptura. Existen otros estudios que llevan a otros puntos de ruptura, y que motivan a elaborar variaciones en la Física para poder contemplar estos fenómenos. Los abordaremos a partir del próximo capítulo con la Teoría Especial de la Relatividad.

3. RELATIVIDAD ESPECIAL, INTRODUCCIÓN.

La Teoría de la Relatividad surgió durante la búsqueda de formulaciones matemáticas que pudieran lidiar con las transformaciones entre sistemas de referencia que se mueven uno respecto al otro.

El concepto de *relatividad* tiene que ver en parte con lo siguiente:
→Si hay ecuaciones físicas (por ejemplo la ecuación de ondas) que son correctas en Σ y fallan al pasar a Σ', eso está sugiriendo que Σ es un sistema absoluto o privilegiado debido a su *quietud*, y Σ' fracasa en la aplicación de las ecuaciones porque se mueve.
→Sin embargo, los observadores de Σ' ven a Σ moviéndose con velocidad relativa $-\vec{v_o}$. Los mismos argumentos simétricos valen para que ellos sostengan que Σ' es el privilegiado y que Σ es el culpable de las rupturas por causa de su movimiento. Tal simetría se quebraría si se demostrara la presencia de un éter absoluto solidario a algún referencial preferido, pero no hubo hasta ahora comprobación experimental.

3.1 Análisis de las rupturas.

Volvemos a los puntos de ruptura encontrados en la sección 2.3, tratando de encontrar pistas sobre las reformulaciones que son necesarias para resolver las rupturas.

3.1.1 Diferencia de fuerzas:

En 2.3.1 nos aparecía una fuerza parásita entre las placas del condensador móvil y fallaba la igualdad galileana $f_x'=f_x$ a pesar de no haber fuerzas de inercia.
Buscamos expresar esa fuerza problemática en función de otras magnitudes involucradas en el experimento.

$f_x = -q.u_z.B_y$ →sustituimos $u_z=u'_z$ $B_y= -v_o/c^2.E'_z$
$f_x = q.u'_z.v_o/c^2.E'_z$ →reagrupamos
$f_x = v_o/c^2.q.\ E'_z.u'_z$
$f_x = v_o/c^2.q.\ E'_z.u'_z$ →reconocemos $f_z'=q.E'_z$
$f_x = v_o/c^2.\ f_z'.u'_z$
$f_x = v_o/c^2.f_z'.u'_z$ →identificamos $\dot{W}'=f_z'.u'_z$ = potencia suministrada a la carga en Σ'
$f_x = v_o/c^2.\dot{W}'$

Nos queda entonces:

f_x $= v_o/c^2.\dot{W}'$ $+ f_x'$
fuerza total = magnética + eléctrica + otras fuentes

Dentro de lo raro podemos rescatar algo: la fuerza *parásita* está bien cuantificada, depende de la velocidad del movimiento relativo y del componente temporal de la cuadrifuerza según Σ' (cuadrivector del cual f_x forma parte). No es algo tan diferente al caso en que el movimiento relativo nos producía una diferencia entre J'_x y J_x proporcional a $v_o.\rho'$, solo que aquí no nos esperábamos esa *contaminación de componentes* porque ya habíamos encontrado una alteración en la componente temporal. Es la primera vez que nos aparece también una alteración en la componente espacial, y resulta un primer indicio sobre el tipo de modificaciones que serían necesarias para cambiar la Transformación de Galileo por una versión relativista.

3.1.2 Cuadripotencial:

Nuestros desarrollos actuales ponen de manifiesto un conflicto en las reglas de variación de los componentes del cuadrivector potencial ***A4***$=(\Phi/c, \vec{A})$.
Para lograr invarianza en la condición de calibre Lorenz requerimos:

$\Phi=\Phi'$ $\vec{A} = \vec{A}' + \vec{v_o}/c^2.\Phi'$

A los componentes les estamos pidiendo que se comporten igual que la carga y la corriente de ***J4***.

Para compatibilidad con el potencial del Lagrangeano el requerimiento es distinto:

$\Phi=\Phi' + \vec{v_o} \cdot \vec{A}'$ $\vec{A} = \vec{A}'$

Aquí estamos precisando que se comporten igual que los componentes del cuadrivector potencia-fuerza ***F4***.

Las dos reglas de transformación son incompatibles entre sí, un mismo potencial escalar Φ y un mismo potencial vectorial $\vec{A}$ no pueden convertirse de manera diferente según las demandas de cada ley física.

Podríamos imaginar una nueva regla de transformación intermedia, a mitad de camino entre ambas:

¿$\Phi \approx \Phi' + \vec{v_o} \cdot \vec{A'}$? ¿$\vec{A} \approx \vec{A'} + \vec{v_o}/c^2.\Phi'$?

Esta conjetura es incompatible con la invarianza de las dos leyes en las que participa el cuadripotencial, pero al menos sigue la misma línea simétrica sugerida en el ejemplo anterior de la cuadrifuerza 3.1.1: propone una variación tanto en las componentes espaciales como en las temporales.

3.1.3 Ecuación de ondas:

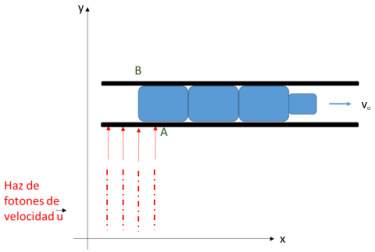
La invarianza de la ecuación de ondas requiere que se cumplan simultáneamente $\omega^2/c^2=k^2$ y $\omega'^2/c^2=k'^2$.
Es decir, que sea nula la norma del cuadrivector de onda $<K4, K4> = k^2-\omega^2/c^2$.
Si la onda es emitida desde el tren con $\omega'=k'.c$ →la estación debe recibirla con $\omega=k.c$.
Si es la estación la que emite la onda con $\omega=k.c$ →el tren la debe captar con $\omega'=k'.c$ en su referencial Σ'.
Las primeras reglas de transformación razonadas a partir de argumentos clásicos no permiten esta invarianza.

$\omega'=\omega - v_o.k_x$

$k'_x=k_x$ . . . . .

Aquí hay una asimetría o desbalance debido a que solo se modifica la parte temporal. Al restar los cuadrados $\omega'^2/c^2 - k'^2$ nos queda un término parásito que involucra el producto $\omega.k_x$.

La sección 2.3.5 ofrece un escenario que nos da una pista sobre la modificación que estamos precisando.



En el referencial Σ circula una onda transversal al desplazamiento del tren, con fotones viajando a velocidad $\vec{u}=c.\hat{y}$. La adición galileana de velocidades, en versión vectorial, sugiere $\vec{u'}=\vec{u}-\vec{v_o}$.
Multiplicando a ambos miembros por la constante ω/c^2, tenemos $\omega/c^2.\vec{u'}= \omega/c^2.\vec{u} - \omega/c^2.\vec{v_o}$.
$\omega/c^2.\vec{u}=\vec{k}$ es el vector de onda, que apunta en la dirección de propagación y cuyo módulo verifica $k=\omega/c$.
Tanto en Σ como en Σ', las velocidades deben ser proporcionales a los respectivos vectores de onda $\vec{k}$ y $\vec{k'}$, por lo que podríamos re-escribir lo anterior como una regla tentativa $\vec{k'} \approx \vec{k} - \omega/c^2.\vec{v_o}$.

Proponemos entonces una nueva regla de transformación contemplando que también haya una variación en la parte espacial, en armonía con las sugerencias de 3.1.1 y 3.1.2:

¿$\omega' \approx \omega - v_o.k_x$?

¿$k'_x \approx k_x - \mathbf{v_o/c^2.\omega}$?

Ejercicio: Demostrar que $\omega'^2/c^2 - k'^2 = (1-v_o^2/c^2)(\omega^2/c^2 - k^2)$. Con el término rojo estamos más cerca de lograr una invarianza gracias a que se cancelan los dobles productos de los cuadrados de binomio. Las normas de *K4* y *K4'* no quedan exactamente iguales, pero la discordancia es del orden de v_o^2/c^2, normalmente muy baja para velocidades de escala humana $v_o \ll c$. Y si una de las normas es nula, la otra también es nula.

3.1.4 Simetría espacio-tiempo:

A continuación nos disponemos a repasar todos los cuadrivectores que venimos manejando hasta el momento, recordando el ajuste de la cuarta componente para que tenga las mismas unidades que las otras 3.

tiempo-espacio:	$X4 = (c.t$	x	y	z)	contravariante
carga-corriente:	$J4 = (c.\rho$	J_x	J_y	$J_z)$	contravariante
cuadri-potencial:	$A4 = (\Phi/c$	A_x	A_y	$A_z)$	**conflicto**
cuadri-derivada:	$\partial 4 = (1/c.\partial_t$	∂_x	∂_y	$\partial_z)$	covariante
cuadri-fuerza "principal":	$F4 = (\dot{W}/c$	f_x	f_y	$f_z)$	**conflicto**
cuadrivector de onda:	$K4 = (\omega/c$	k_x	k_y	$k_z)$	**conflicto, varianza indefinida**
cuadri-fuerza "alternativa":	$F_4 = (-\dot{W}/c$	f_x	f_y	$f_z)$	covariante
cuadrivector de onda:	$K_4 = (-\omega/c$	k_x	k_y	$k_z)$	forma alternativa covariante.

Re-escribimos las transformaciones encontradas en el capítulo anterior:

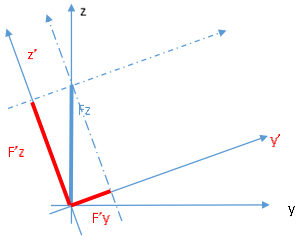
$dx = dx' + v_o.dt'$	$dX4[1] =$	$dX4'[1]$	$+ v_o/c.dX4'[0]$
$Jx = Jx' + v_o.\rho'$	$J4[1] =$	$J4'[1]$	$+ v_o/c.J4'[0]$
$Ax = Ax' + v_o.\Phi'/c^2$	$A4[1] =$	$A4'[1]$	$+ v_o/c.A4'[0]$
$\partial_{t'} = \partial_t + v_o.\partial_x$	$\partial 4'[0] =$	$\partial 4[0]$	$+ v_o/c.\partial 4[1]$
$-\omega' = -\omega + v_o.kx$	$K_4'[0] =$	$K_4[0]$	$+ v_o/c.K_4[1]$
$\dot{W} = \dot{W}' + v_o.fx'$	$F4[0] =$	$F4'[0]$	$+ v_o/c.F4'[1]$
$fx = fx' + v_o/c^2.\dot{W}'$	$F4[1] =$	$F4'[1]$	$+ v_o/c.F4'[0]$

Resaltamos las últimas ecuaciones por dos razones:

- porque fueron las que nos enfrentaron a la primera ruptura con la Física Clásica.
- porque guardan una simetría que no aparecía en las demás ecuaciones, **las componentes-0 y las componentes-1 aparecen por primera vez tratadas en un pie de igualdad**.

Esa simetría o igualdad en el tratamiento espacio-tiempo parece insinuarse también como una posibilidad para conciliar los conflictos en la ecuación de ondas y en las transformaciones del cuadripotencial.

Pensemos en lo siguiente: una rotación espacial en el plano y-z produce una mezcla profunda en las componentes y,z de todas las magnitudes vectoriales y operadores diferenciales:



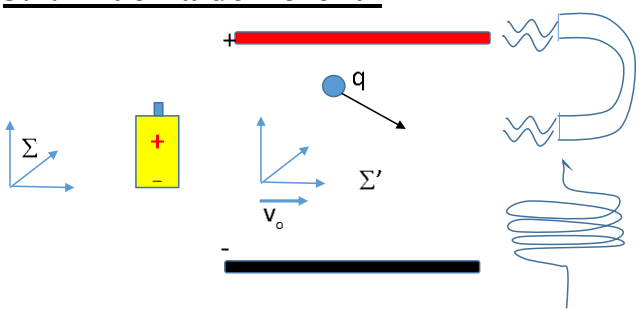
Una magnitud que en Σ se describía solo con componente F_z, ahora pasa a tener F'_y, F'_z cuando se analiza en el referencial Σ' de los ejes girados.
Un campo que solo variaba en dirección-y ∂_y, ahora pasa a variar ∂_y' ∂_z' en el otro referencial rotado.
$F_z = \cos(\alpha).F'_z + \text{sen}(\alpha).F'_y$
$F_y = -\text{sen}(\alpha)F'_z + \cos(\alpha).F'_y$
Dicho de otra manera: parte de lo que era F_y se manifiesta como F'_z, y parte de F_z aparece como F'_y al cambiar de referencia. El efecto es más notorio cuanto mayor es el ángulo 'α' con que giran los ejes.

Podría estar pasando lo mismo cuando nos desplazamos en el tiempo a lo largo de la coordenada x.
Tal vez *todas* las componentes[t,x] de *todas* las magnitudes Σ están siendo afectadas por sus correspondientes componentes[t',x'] del otro referencial Σ', y los efectos son más pronunciados cuanto mayor es el cociente v_o/c , como si se tratara de un ángulo.
Si hay casos en que no percibimos todavía esta variación es porque los efectos están enmascarados debido al bajo valor que adquiere habitualmente el cociente v_o/c (Recordemos que 'c' es muy alto, ~300000km/seg).

3.2 Alteraciones electromagnéticas.

Imaginamos dos equipos científicos en Σ y Σ' dispuestos a estudiar las posibles discrepancias al pasar de un sistema de referencia a otro en movimiento relativo uniforme. Preparan experimentos electromagnéticos utilizando generadores, motores, baterías, cables, bobinas, condensadores, imanes, cargas móviles…etc. Cada grupo de trabajo describe las ecuaciones físicas en base a las magnitudes que observa.

3.2.1 Fuerza de Lorentz:



En Σ ven:
densidad de carga y corriente=ρ,$\vec{J}$
carga=q
velocidad de la carga=$\vec{u}$
potenciales=Φ,$\vec{A}$
campos=$\vec{E}$, $\vec{B}$

En Σ' ven:
densidad de carga y corriente=ρ',$\vec{J}'$
carga=q
velocidad de la carga=$\vec{u}'$
potenciales=Φ',$\vec{A}'$
campos=$\vec{E}'$, $\vec{B}'$.

La suma de velocidades implica $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v_o}$, es decir: velocidad absoluta = relativa + arrastre.

La fuerza experimentada por la partícula tiene componente eléctrica y magnética, de acuerdo con la fórmula de Lorentz. Cada equipo de trabajo la expresa en sus magnitudes:

En Σ: $\vec{f} = q.\vec{E} + q.\vec{u} \wedge \vec{B}$

En Σ': $\vec{f}' = q.\vec{E}' + q.\vec{u}' \wedge \vec{B}'$

3.2.2 Transformación de campos:

Nos resistimos inicialmente a aceptar la perturbación de las fuerzas insinuada en la secciones 2.3 y 3.1.1, y nos aferramos a la idea galileana de que debería cumplirse $\vec{f}=\vec{f}'$.

$\vec{f} = \vec{f}'$ →expresamos por fórmula de Lorentz→

$q.\vec{E} + q.\vec{u} \wedge \vec{B} = q.\vec{E}' + q.\vec{u}' \wedge \vec{B}'$ →eliminamos factor común 'q'

$\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{u}' \wedge \vec{B}'$ →sustituimos $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v_o}$

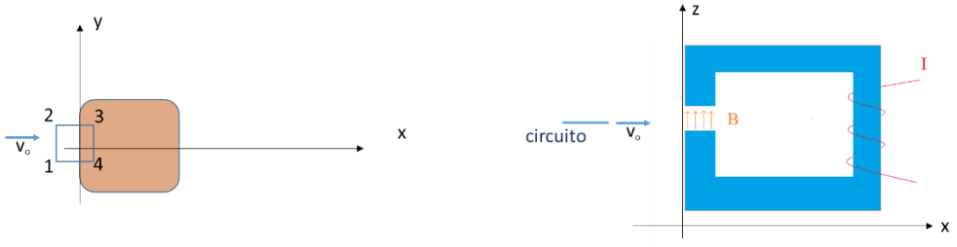
$\vec{E} + \vec{v_o} \wedge \vec{B} + \vec{u'} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{u}' \wedge \vec{B}'$

$\vec{E} + \vec{v_o} \wedge \vec{B} + u'^{\rightarrow} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{u}' \wedge \vec{B}'$

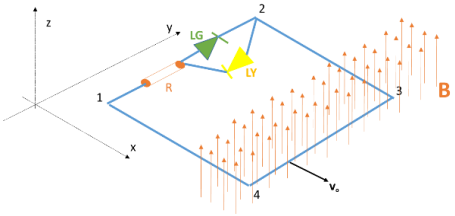
Para el caso particular en que la partícula se mueve con la misma velocidad de arrastre del sistema Σ', tendríamos $\vec{u}= \vec{v_o}$ y $\vec{u}'=0$. En Σ' solo se experimenta fuerza eléctrica, de acuerdo con la definición "*campo eléctrico es fuerza por unidad de carga cuando la carga está en reposo*".

Esto conduce a la relación $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v_o} \wedge \vec{B}$.

Podemos demostrar que la relación recién enunciada $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v_o} \wedge \vec{B}$ es perfectamente consistente con la Ley de Inducción de Faraday de los motores y generadores eléctricos, si se aplica al referencial solidario a la espira móvil "1234" de la siguiente figura: xy=vista superior; xz=vista lateral



El electroimán crea en una región limitada un campo magnético constante y aproximadamente uniforme en la dirección del eje ẑ. Un circuito "1234" contenido en un plano horizontal 'xy' avanza con velocidad $v_o.\hat{x}$ hacia la zona magnetizada. A continuación se muestra en perspectiva 3D cómo se vería el circuito parcialmente cubierto por las líneas de campo magnético.



Cuando $v_o>0$, circula corriente en sentido horario y brilla el led verde LG.
Cuando $v_o<0$, circula corriente en sentido antihorario y brilla el led amarillo LY.
Ejercicio: Realizar los cálculos y comprobar con los resultados del capítulo 15.

Continuamos con la hipótesis galileana $\vec{f}=\vec{f}'$, y en la expresión anterior eliminamos los términos que acabamos de razonar que deben ser iguales:

$$\vec{E} + \vec{v_o} \wedge \vec{B} + \vec{u'} \wedge \vec{B} = \vec{E'} + \vec{u'} \wedge \vec{B'}$$
$$\vec{u'} \wedge \vec{B} = \vec{u'} \wedge \vec{B'}$$
$$\vec{u'} \wedge (\vec{B} - \vec{B'}) = \vec{0}$$

Esto tiene que ser válido para cualquier valor de $\vec{u'}$ en sus 3 grados de libertad espaciales. El vector diferencia $\vec{B} - \vec{B'}$ puede tener producto vectorial nulo contra $\vec{u'}$ en 1 grado de libertad ($\vec{u'}$ variando en una recta), pero no en 3 grados de libertad (variando arbitrariamente en las 3 direcciones espaciales).
Esta condición solo puede cumplirse si se anula el segundo factor del producto vectorial $\vec{B'}-\vec{B}$.
Lo cual conduce a la relación: $\vec{B} = \vec{B'}$.
Tenemos entonces una propuesta de reglas de transformación de los campos electromagnéticos al alternar entre dos sistemas Σ y Σ' en movimiento relativo: $\vec{E'} = \vec{E} + \vec{v_o} \wedge \vec{B}$ $\qquad$ $\vec{B'} = \vec{B}$

Invitación a reflexionar: ¿El campo eléctrico $\vec{E}$ puede formar parte de un cuadrivector? Parecería que no, porque estas leyes de transformación sugieren que sus componentes son afectadas por E_x,E_y,E_z,B_x,B_y,B_z durante un cambio de variable de movimiento relativo Σ→Σ'. ¿Entonces tendríamos que pasar a un espacio de 6 dimensiones para describirlo como un hexavector $\mathit{EB6}=(E_x,E_y,E_z,B_x,B_y,B_z)$?
En el capítulo 5 veremos que se logra una descripción satisfactoria si se ubican estos 6 componentes como casilleros de una matriz (tensor) 4x4. La fórmula $\vec{B}=\nabla\wedge\vec{A}$ significa que $B_x=\partial_y A_z - \partial_z A_y$, las componentes se pueden numerar con 2 índices i,j, expresados en términos de la derivada del componente-j del potencial respecto a la coordenada-i. Algo similar ocurre para las componentes del campo eléctrico $\vec{E}= -\nabla\Phi - \partial_t\vec{A}$.

3.2.3 Ecuaciones de Maxwell:

Nos proponemos a continuación estudiar cómo se modifican las ecuaciones de Maxwell al cambiar de un referencial Σ a otro Σ'.

Monopolos magnéticos:
Comenzamos con la ecuación $\nabla\cdot\vec{B} = 0$, que afirma la ausencia de monopolos magnéticos como una de las consecuencias de la Ley de Biot-Savart. (También podría llamarse "Ley de Gauss magnética").
Sustituimos los campos y los operadores de derivación por sus correspondientes en Σ', aplicando las transformaciones de Galileo:

- $\nabla=\nabla'$ (sección 2.1.3)
- $\vec{B}=\vec{B'}$ (sección 3.2.2)

Nos queda $\nabla'\cdot\vec{B'} = 0$.
Es decir, en el sistema Σ' también se observa un campo magnético con divergencia nula.
Comprobamos que esta ley resiste en forma exitosa un cambio de referencia.

Ley de Faraday:

Partimos de la fórmula de transformación de campos deducida en 3.2.2:

$\vec{E'} = \vec{E} + \vec{v_o} \wedge \vec{B}$ →tomamos rotacional a ambos miembros

$\nabla \wedge \vec{E'} = \nabla \wedge \vec{E} + \nabla \wedge (\vec{v_o} \wedge \vec{B})$ →aplicamos Ley de Faraday en Σ

$\nabla \wedge \vec{E'} = -\partial_t \vec{B} + \nabla \wedge (\vec{v_o} \wedge \vec{B})$

$\nabla \wedge \vec{E'} = -\partial_t \vec{B} + \nabla \wedge (\vec{v_o} \wedge \vec{B})$ →aplicamos fórmula de Cálculo Vectorial

$\nabla \wedge \vec{E'} = -\partial_t \vec{B} + (\nabla \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \nabla)\vec{v_o} - (\nabla \cdot \vec{v_o} + \vec{v_o} \cdot \nabla)\vec{B}$

$\nabla \wedge \vec{E'} = -\partial_t \vec{B} + (0 + \vec{B} \cdot \nabla)\vec{v_o} - (0 + \vec{v_o} \cdot \nabla)\vec{B}$ →simplificamos todo lo que es nulo…

$\nabla \wedge \vec{E'} = -\partial_t \vec{B} + \vec{B} \cdot \nabla \vec{v_o} - \vec{v_o} \cdot \nabla \vec{B}$

$\nabla \wedge \vec{E'} = -\partial_t \vec{B} + 0 - \vec{v_o} \cdot \nabla \vec{B}$

$\nabla \wedge \vec{E'} = -\partial_t \vec{B} - \vec{v_o} \cdot \nabla \vec{B}$ →agrupamos

$\nabla \wedge \vec{E'} = -(\partial_t + \vec{v_o} \cdot \nabla)\vec{B}$ →reconocemos de 2.1.3 $\partial'_t = \partial_t + \vec{v_o} \cdot \nabla$

$\nabla \wedge \vec{E'} = -\partial'_t \vec{B}$ →finalmente, reemplazamos $\nabla = \nabla'$ y $\vec{B} = \vec{B'}$

$\nabla' \wedge \vec{E'} = -\partial'_t \vec{B'}$

$\nabla' \wedge \vec{E'} + \partial'_t \vec{B'} = 0$

Nos queda exactamente la Ley de Faraday en el referencial Σ'. Esa es la invarianza que buscamos.

Ley de Ampere:

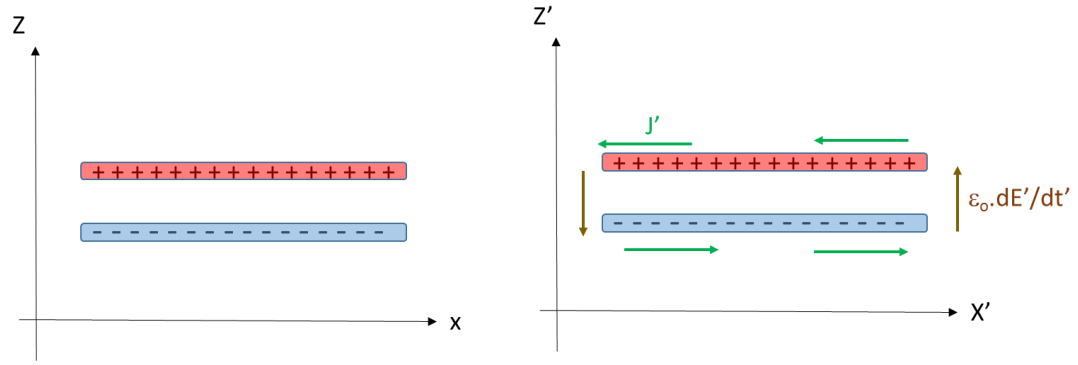
Aquí nos enfrentamos a una incompatibilidad a la que deberemos encontrarle un sentido.

En 2.1.4 analizábamos un escenario en donde era evidente que las cargas en movimiento producían una diferencia de campos magnéticos. Llegábamos a $A_x = A'_x + v_o/c^2.\Phi'$, en claro conflicto con $\vec{B'} = \vec{B}$.

Veremos otro ejemplo donde se genera un dilema similar.

En el referencial Σ tenemos un condensador cargado y quieto, es decir, un escenario electrostático con $\vec{B}=0$.

Σ' se mueve respecto a esa configuración electrostática con velocidad $\vec{v_o} = \hat{x}.v_o$



En ese referencial Σ' vemos un condensador móvil viajando con velocidad $-\vec{v_o}$: la figura muestra en verde las líneas de corriente $\vec{J'}$ y en marrón las líneas de corriente de desplazamiento de Maxwell $\epsilon_o.\partial'_t\vec{E'}$.

El campo suma $\vec{J'}+\epsilon_o.\partial'_t\vec{E'}$ no puede ser nulo en todo el espacio, en el mejor caso podrá formar trayectorias cerradas (de divergencia nula) compatibles con la conservación de la carga → no puede ser el rotacional de ningún campo vectorial nulo $\vec{B'}$.

- Si aceptamos la transformación de Galileo $\vec{B}=\vec{B'}$, entonces también debe ser $\vec{B'}=0$ y no puede cumplirse la Ley de Ampere en su forma exacta; se precisan términos o factores de ajuste en Σ'. (*Tendríamos que atribuirle al hipotético éter la extraña propiedad de mantener nulo $\vec{B'}$ a pesar de la contribución proveniente de la corriente de desplazamiento de Maxwell y la de arrastre $\vec{J'}$*).
- Por otro lado, si aceptamos que la Ley de Ampere también debe cumplirse en Σ': $\nabla \wedge \vec{B'} = \mu_o.(\vec{J'}+\epsilon_o.\partial'_t\vec{E'})$, entonces donde se requieren modificaciones es en la transformación de Galileo.

En compatibilidad con lo visto en 2.1.4 la propuesta de modificación alternativa sería $\vec{B'} \approx \vec{B} - (\vec{v_o} \wedge \vec{E})/c^2$, que parece bastante simétrica a la eléctrica $\vec{E'}=\vec{E}+\vec{v_o}\wedge\vec{B}$, más todavía si escalamos ($\vec{v_o}/c$=adimensionado) y ($\vec{E}/c$=mismas unidades que $\vec{B}$).

Ejercicio: Demostrar que esta propuesta de $\vec{B'}$ cumple $\nabla \cdot \vec{B'} = 0$ y $\nabla \wedge \vec{B'} = \mu_o.(\vec{J'}+\epsilon_o.\partial'_t\vec{E'})$.

Prueba: Solo para escenarios electrostáticos donde $\vec{B} = 0$.

a) Divergencia

$\vec{B'} = \vec{B} - (\vec{v_o} \wedge \vec{E})/c^2$ → asumimos $\vec{B} = 0$

$\vec{B'} = 0 - (\vec{v_o} \wedge \vec{E})/c^2$

$\nabla \cdot \vec{B'} = -\nabla \cdot (\vec{v_o} \wedge \vec{E})/c^2$ → divergencia de un producto vectorial

$\nabla \cdot \vec{B'} = -1/c^2.[\vec{E} \cdot (\nabla \wedge \vec{v_o}) - \vec{v_o} \cdot (\nabla \wedge \vec{E})]$ → $\vec{v_o}$ constante, no se afecta por la derivación ∇

$\nabla \cdot \vec{B'} = -1/c^2.[0 - \vec{v_o} \cdot (\nabla \wedge \vec{E})]$

$\nabla \cdot \vec{B'} = 1/c^2.[\vec{v_o} \cdot (\nabla \wedge \vec{E})]$ → Ley de Faraday en Σ, $\vec{E}$=irrotacional

$\nabla \cdot \vec{B'} = 0$

b) Rotacional

$\nabla \wedge \vec{B'} = -\nabla \wedge (\vec{v_o} \wedge \vec{E})/c^2$ → rotor de un producto vectorial

$\nabla \wedge \vec{B'} = -1/c^2.[\nabla \cdot \vec{E}\ \vec{v_o} + \vec{E} \cdot \nabla\ \vec{v_o} - \nabla \cdot \vec{v_o} \vec{E} - \vec{v_o} \cdot \nabla\ \vec{E}]$ → $\vec{v_o}$ constante

$\nabla \wedge \vec{B'} = -1/c^2.[\nabla \cdot \vec{E}\ \vec{v_o} + 0 - 0 - \vec{v_o} \cdot \nabla\ \vec{E}]$

$\nabla \wedge \vec{B'} = -1/c^2.[\nabla \cdot \vec{E}\ \vec{v_o} - \vec{v_o} \cdot \nabla\ \vec{E}]$

$\nabla \wedge \vec{B'} = -1/c^2.\nabla \cdot \vec{E}\ \vec{v_o} + 1/c^2\ \vec{v_o} \cdot \nabla\ \vec{E}$ → sustituimos 2.1.3 $\partial'_t = \partial_t + \vec{v_o} \cdot \nabla$

$\nabla \wedge \vec{B'} = -1/c^2.\nabla \cdot \vec{E}\ \vec{v_o} + 1/c^2(\partial'_t \vec{E} - \partial_t \vec{E})$

$\nabla \wedge \vec{B'} = -1/c^2.\nabla \cdot \vec{E}\ \vec{v_o} + 1/c^2(\partial'_t \vec{E} - \partial_t \vec{E})$ → hipótesis de escenario electrostático

$\nabla \wedge \vec{B'} = -1/c^2.\nabla \cdot \vec{E}\ \vec{v_o} + 1/c^2(\partial'_t \vec{E} - 0)$

$\nabla \wedge \vec{B'} = -1/c^2.\nabla \cdot \vec{E}\ \vec{v_o} + 1/c^2.\partial'_t \vec{E}$ → por 3.2.2 $\vec{E'} = \vec{E} + \vec{v_o} \wedge \vec{B}$, cuando $\vec{B} = 0$

$\nabla \wedge \vec{B'} = -1/c^2.\nabla \cdot \vec{E}\ \vec{v_o} + 1/c^2.\partial'_t \vec{E'}$

$\nabla \wedge \vec{B'} = -1/c^2.\nabla \cdot \vec{E}\ \vec{v_o} + 1/c^2.\partial'_t \vec{E'}$ →Ley de Gauss en Σ

$\nabla \wedge \vec{B'} = -1/c^2.\rho/\epsilon_o\ \vec{v_o} + 1/c^2.\partial'_t \vec{E'}$

$\nabla \wedge \vec{B'} = -1/c^2.\rho/\epsilon_o\ \vec{v_o} + 1/c^2.\partial'_t \vec{E'}$ →relación μ_o vs. ϵ_o

$\nabla \wedge \vec{B'} = -\mu_o \rho \vec{v_o} + 1/c^2.\partial'_t \vec{E'}$

$\nabla \wedge \vec{B'} = -\mu_o \rho \vec{v_o} + 1/c^2.\partial'_t \vec{E'}$ → por 2.1.2 $\vec{J'} = \vec{J} - \rho \vec{v_o} = -\rho \vec{v_o}$

$\nabla \wedge \vec{B'} = \mu_o \vec{J'} + 1/c^2.\partial'_t \vec{E'}$

Actividad: Sugerimos planificar un experimento para aclarar las dudas sobre las corrientes de arrastre causadas por cargas móviles: ¿solo obedecen la Ley de Ampere cuando se mueven respecto al éter? ¿O la verifican siempre en cualquier sistema de referencia?
Nuestro objetivo es medir en forma precisa un campo magnético B' del orden de magnitud de $E.v_o/c^2$, posiblemente muy bajo debido a la condición $v_o \ll c$.
a) Averiguar el valor de la constante dieléctrica del aire. Esto marca una cota superior a la intensidad tolerable |E| si queremos evitar arcos eléctricos y chispas.
b) ¿Qué posibles valores podríamos tener para la velocidad v_o y para el campo eléctrico E?
c) Estimar el orden de magnitud esperado para los campos B' que pretendemos medir. Investigar si hay disponibles sensores magnéticos con precisión picoTesla (10^{-12}) or femtoTesla (10^{-15}).
d) ¿Es necesario viajar al espacio exterior para realizar el experimento en ausencia de aire?

Ley de Gauss-Coulomb:
Partimos de la fórmula de transformación de campos eléctricos y tomamos divergencia a ambos lados.

$\vec{E'} = \vec{E} + \vec{v_o} \wedge \vec{B}$

$\nabla \cdot \vec{E'} = \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot (\vec{v_o} \wedge \vec{B})$

El término marcado en rojo es responsable de que el campo eléctrico tenga distinta divergencia según el sistema de referencia en el que se observa, lo que nos enfrenta a otro conflicto:

Si nos basamos al pie de la letra en los argumentos pre-relativistas compatibles con la Transformación de Galileo ($\vec{J} = \vec{J'} + \rho' . \vec{v_o}$, $\rho = \rho'$, sección 2.1.2), deberemos aceptar que esta ley física solo puede cumplirse en

forma exacta en uno de los dos sistemas, por ejemplo en Σ (que lo llamaríamos el "sistema absoluto" o el "sistema privilegiado").
En el otro sistema Σ' habría otras fuentes de divergencia de $\vec{E}$' que no se corresponderían con la densidad de carga ρ', es decir: se precisarían términos correctores en otra de las ecuaciones de Maxwell.

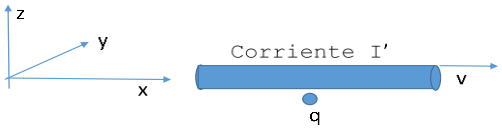
La Teoría de la Relatividad que estamos elaborando se sostiene en la idea de que no podemos detectar ningún sistema privilegiado, todos los sistemas en movimiento relativo son equivalentes. Tanto en Σ como en Σ' se debe cumplir la Ley de Gauss-Coulomb en su misma forma $\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_o$,$\nabla\cdot\vec{E'} = \rho'/\epsilon_o$

$\nabla\cdot\vec{E'} = \nabla\cdot\vec{E} + \nabla\cdot(\vec{v_o}\wedge\vec{B})$	Aplicamos Ley de Gauss en modo diferencial a Σ y Σ'
$\rho'/\epsilon_o = \rho/\epsilon_o + \nabla\cdot(\vec{v_o}\wedge\vec{B})$	Calculamos divergencia del producto vectorial
$\rho'/\epsilon_o = \rho/\epsilon_o - (\nabla\wedge\vec{B})\cdot\vec{v_o}$	sustituimos $\vec{B}=\vec{B'}$
$\rho'/\epsilon_o = \rho/\epsilon_o - (\nabla\wedge\vec{B'})\cdot\vec{v_o}$	Aplicamos en Σ' la Ley de Ampere para corrientes constantes $\nabla\wedge\vec{B'}=\mu_o\vec{J'}$
$\rho'/\epsilon_o = \rho/\epsilon_o - \mu_o\vec{J'}\cdot\vec{v_o}$	Proyectamos sobre el eje $\vec{x} \rightarrow J'_x$
$\rho'/\epsilon_o = \rho/\epsilon_o - \mu_o v_o J'_x$	Expresamos $\mu_o = 1/(c^2\epsilon_o)$
$\rho' = \rho - v_o/c^2.J'_x$	reordenamos
$\rho = \rho' + v_o/c^2.J'_x$	

→La hipótesis relativista lleva a un resultado $\rho\neq\rho'$ que entra en conflicto con la transformación de Galileo para el cuadrivector *J4* de 2.1.2

3.2.4 Transformación de cargas y corrientes:

Aplicamos a las geometrías cilíndricas las relaciones recién vistas en 3.2.2 y 3.2.3. Intentamos investigar dónde están las fuentes o sumideros que marcan una diferencia en las divergencias de $\vec{E}$ y $\vec{E'}$, y ver si pueden interpretarse como una abstracción matemática o como cargas físicas reales.



Suponemos una carga de prueba en reposo ubicada en las cercanías de un cilindro largo, lejos de los bordes. Alcanza con que las distancias radiales 'r' y axiales 'x' sean mucho menores a la extensión axial del cilindro 'L' (r≪L, x≪L) para que el cilindro se comporte como infinito a efectos prácticos.
Utilizamos r,$\vec{e_r}$,$\vec{e_\varphi}$ para describir el plano (y,z) en coordenadas cilíndricas con eje polar x̂.

El cilindro transporta una corriente I' a lo largo de su longitud y se mueve con velocidad $\vec{v_o}$ en el sentido de su eje. En el referencial Σ' solidario al cilindro la carga de prueba se ve como móvil con $\vec{u'}= -\vec{v_o}$ y experimenta una fuerza magnética que intenta alejar del cilindro. Allí los campos y potenciales valen:

$\vec{E'}=0$, $\Phi'=0$	porque el cable es conductor ideal (metal con resistividad nula) y también es eléctricamente neutro (no tiene carga espacial + ni –)
$\vec{B'}=\mu_o.I'/(2\pi r)\ \vec{e_\varphi}$,	
$A_x'=\mu_o.I'/(2\pi).\log(L/r)$	$\vec{A'}$ es un posible potencial vectorial (no único) que genera $\vec{B'}$
$A_y'=0$, $A_z'=0$	

Ejercicio: Demostrar que el $\vec{A'}$ propuesto verifica $\nabla\wedge\vec{A'} = \vec{B'}$.

Que la carga sea repelida lejos del cilindro es algo en lo que deben concordar todos los observadores. La carga está inicialmente quieta en Σ, no puede experimentar fuerza magnética. La repulsión que experimenta solo puede ser de origen eléctrico de acuerdo con las fórmulas vistas en la sección 3.2.2:

$\vec{E}=\vec{E'}-\vec{v_o}\wedge\vec{B'} = -\vec{v_o}\wedge\vec{B'}$
$\vec{E}= \mu_o.I'.v_o/(2\pi\ r)\ \vec{e_r}$

El cilindro se comporta como si tuviera carga neta positiva, crea un campo $\vec{E}$ radial saliente con la misma forma matemática correspondiente a una carga 'λ' por unidad de longitud.

$\vec{E}=\lambda/(2\pi.\epsilon_0 r)\ \vec{e_r}$

La equivalencia es: $\lambda/\epsilon_0=\mu_o.I'.v_o$

$\lambda= \epsilon_0.\mu_o.I'.v_o$ $\rightarrow$reconocemos $\mu_o.\epsilon_0=1/c^2$

$\lambda= I'.v_o/c^2$

Si dividimos por el área transversal del cable, nos queda carga volumétrica a ambos miembros:

$\lambda/Area= I'/Area.v_o/c^2$

$\rho= J'_x.v_o/c^2$

Acabamos de analizar un caso particular en que el cable era neutro en su referencial solidario, $\rho'=0$.
Si fuera $\rho'\neq 0$ sus efectos serían aditivos y enunciaríamos lo siguiente para una situación general:

$\rho = \rho' + J_x'.v_o/c^2.$

Que traducido a palabras sería:
La densidad de carga en el referencial Σ es suma de la densidad medida en Σ' ***+ una contribución adicional asociada por las corrientes móviles que se perciben como una carga aparente***.

Los argumentos basados en la fuerza de Lorentz y en las ecuaciones de Maxwell están sugiriendo que un cable con corriente, eléctricamente neutro en su referencial solidario Σ' (por tener un balance exacto entre iones y electrones), no es neutro cuando se observa en movimiento desde Σ: las líneas de campo $\vec{E}$ nacen o terminan en los puntos donde hay corrientes móviles, como si allí hubiera carga neta sin balancear. Las magnitudes ρ y $\vec{J}$ involucran densidades por unidad de volumen o flujos por unidad de tiempo y área, y estos resultados dan la pista de que *las medidas y las percepciones de espacio y de tiempo están siendo alteradas por el movimiento relativo entre los sistemas*.

3.2.5 Transformación de potenciales:

Volvemos al campo eléctrico recién calculado en el escenario cilíndrico: $\vec{E}= \mu_o.I'.v_o/(2\pi\ r)\ \vec{e_r}$.
Este campo deriva de un potencial, por integral de línea se obtiene: $\Phi=\mu_o.I'.v_o/(2\pi)\log(K/r)$.
'K' surge de una constante de integración, en principio indeterminada.
En los ejercicios resueltos del capítulo 15 se justifica que K≈L es una elección apropiada para situaciones en las que L≫a. ('L' es la longitud del cilindro).

Reconocemos el mismo potencial A'_x del referencial Σ' y reescribimos: $\Phi = v_o.A_x'$.

Tenemos en cuenta que esto que acabamos de calcular es para un caso particular en que no había potenciales Φ' en Σ', lo que nos lleva a suponer que la fórmula más general debe contemplar efectos aditivos:

$\Phi = \Phi' + v_o.A_x'$ $\qquad\qquad$ $\vec{A} = \vec{A}'$

Expresado como que el potencial Φ es suma del Φ' producido por las cargas de Σ' + ***un adicional producido por las corrientes de Σ' que al verse como móviles presentan una carga neta aparente***.

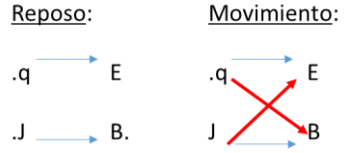
Observación: Estas fórmulas concuerdan con las vistas en 2.3.2, necesarias para lograr una invarianza en el potencial que aparece en el Lagrangeano de las partículas cargadas. Y ahora ofrecen una relación causa efecto para modelar de dónde surge esta diferencia Φ vs. Φ'.
Falta resolver la discordancia con la sección 2.1.4.
En un caso encontrábamos variaciones solo en $\vec{A}$, ahora encontramos variaciones solo en Φ.
Podemos combinar ambos argumentos y suponer que hay variaciones tanto en $\vec{A}$ como en Φ.

Tenemos entonces una nueva propuesta para las fórmulas de transformación de dos cuadrivectores *J4* y *A4*:

$\rho = \rho' + v_o/c^2.J'_x$	$J4[0]$	=	$J4'[0]$	$+ v_o/c.J4'[1]$
$J_x = J_x' + v_o\ .\rho'$	$J4[1]$	=	$J4'[1]$	$+ v_o/c.J4'[0]$
$\Phi = \Phi' + v_o.A'_x$	$A4[0]$	=	$A4'[0]$	$+ v_o/c.A4'[1]$
$A_x = A_x' + v_o/c^2.\Phi'$	$A4[1]$	=	$A4'[1]$	$+ v_o/c.A4'[0]$

Las fórmulas entran en conflicto con las primeras versiones tentativas de 2.1.2 y 2.1.4.

podríamos pensar que son una nueva versión corregida en la cual agregamos términos nuevos que antes no estaban siendo tenidos en cuenta.
Ganamos en simetría *conceptual*: corrientes móviles se ven como cargas y son fuente de campo eléctrico, igual que cargas móviles se veían como corrientes y eran fuentes de campo magnético.



Al movernos de Σ a Σ', parte de lo que era $\vec{B}$ se manifiesta como $\vec{E'}$ y parte de $\vec{E}$ aparece como $\vec{B'}$.
También ganamos en simetría matemática gracias al re-escalado con los factores 'c': las perturbaciones por movimiento relativo ya no consisten en factores sueltos v_o o v_o/c^2, ahora siempre se presentan en forma adimensionada como v_o/c. Tampoco aparecen a veces en la componente-0 y a veces en la componente-1, las alteraciones están apareciendo en forma pareja y sistemática, tanto en el espacio como en el tiempo.

Lo que parece haberse perdido es la capacidad de inversión de las fórmulas.
Debido a la simetría de las situaciones, para expresar las magnitudes Σ' en función de las Σ deberían aplicarse los mismos razonamientos cambiando simplemente el signo de v_o. Ya que Σ es visto por Σ' como moviéndose con velocidad $-v_o$. Lamentablemente las fórmulas pierden su simetría cuando se invierten, al intentar volver de las magnitudes Σ' hacia las Σ nos aparecen factores $(1-v_o^2/c^2)$.

(Ec-0) $\rho = \rho' + v_o/c^2.J'_x$
(Ec-1) $J_x = v_o.\rho' + J'_x$
(Ec1) $-v_o.$(Ec0) → $J_x - v_o.\rho = J'_x.(1-v_o^2/c^2) \neq J'_x$
(Ec0) $- v_o/c^2.$(Ec1) → $\rho - v_o/c^2.J_x = \rho'.(1-v_o^2/c^2) \neq \rho'$
Ejercicio: Buscar un factor 'γ' que corrija la simetría $\rho = \gamma.(\rho' + v_o/c^2.J'_x)$ $J_x = \gamma.(J'_x + v_o.\rho')$

También es preocupante el grado en que están inter-relacionadas unas ecuaciones con otras. La perturbación $A_x = A'_x + v_o/c^2.\Phi'$ tira abajo la idea $\vec{A}=\vec{A'}$ y su equivalente $\vec{B}=\vec{B'}$; por lo tanto también es incompatible con la igualdad galileana de fuerzas $\vec{f'}=\vec{f}$, que fue el punto de partida del desarrollo de la sección 3.2.2 para llegar a $\vec{B}=\vec{B'}$.

Las magnitudes físicas participan de múltiples ecuaciones y se relacionan unas con otras; una propuesta de cambio en la forma de transformación de una de ellas repercute siempre en otras magnitudes y sacude las estructuras. En el capítulo 2 habíamos introducido la idea de unificar todas las reglas de conversión en solamente dos esquemas: el covariante y el contravariante. Vemos ahora que esta estrategia es necesaria para poner orden en el caos.

Si vamos a aceptar que no se cumple la relación $\vec{f'}=\vec{f}$, retomamos la propuesta de la sección 2.3.1 inspirada en el experimento del condensador móvil.
Que mantiene la misma estructura simétrica que viene perfilándose para el resto de los cuadrivectores.

$\dot{W} = \dot{W}' + v_o.f_x'$ $\quad F4[0] = F4'[0] + v_o/c.F4'[1]$
$f_x = f_x' + v_o/c^2.\dot{W}'$ $\quad F4[1] = F4'[1] + v_o/c.F4'[0]$
$f_y = f_y'$ $\quad F4[2] = F4'[2]$
$f_z = f_z'$ $\quad F4[3] = F4'[3]$

Curiosidad: Aquí volvemos a la versión original de la cuadrifuerza con $+\dot{W}$ en lugar de $-\dot{W}$ en la parte temporal; el hecho de que pase a comportarse como contravariante luego de ese cambio de signo adquirirá un sentido más claro en el capítulo 4 cuando lleguemos a estudiar la métrica cuadridimensional.
En esta etapa solo podemos hacer la siguiente aclaración: una magnitud física no es en sí misma covariante ni contravariante; la clasificación aplica a las cuaternas de componentes que la describen en algún sistema de coordenadas, y puede haber versiones diferentes con varianzas opuestas.

3.3 Alteración del espacio-tiempo.

Al llegar a este punto, 3 de los 6 cuadrivectores que venimos estudiando (*J4*, *A4*,*F4*) parecen reaccionar ante un movimiento relativo con un jacobiano de transformación levemente diferente del galileano:

[Jac]=

[1	v_o/c	0	0]
[v_o/c	1	0	0]
[0	0	1	0]
[0	0	0	1]

Los términos fuera de la diagonal del jacobiano representan mezcla o *contaminación* entre las componentes 0 y 1, guardando un parecido con el caso de una rotación espacial aunque con ciertas diferencias.
En una rotación espacial en 3 dimensiones, las componentes luego de la mezcla conservan la norma que es la suma de cuadrados. En nuestro espaciotiempo de 4 dimensiones y durante un cambio de referencia por velocidad uniforme, las mezclas del cuadrivector carga-corriente son las siguientes:

$$c\rho=c\rho'+v_o/c.J'_x$$
$$J_x=J_x'+v_o.\rho'$$

Nos planteamos investigar cómo quedan los cuadrados de los componentes:

$$c^2\rho^2=c^2\rho'^2 + 2\rho'.v_o.J'_x + v_o^2/c^2.J'^2_x$$
$$J_x^2=J_x'^2 + 2J_x'.v_o.\rho' + v_o^2.\rho'^2$$

La suma de cuadrados $c^2\rho^2+J_x^2$ queda fuertemente contaminada por los dobles productos que se suman.
Sin embargo, por raro que pueda parecer, en estos escenarios vemos que ***la resta de cuadrados está más cerca de conservarse*** que la suma porque se cancelan los dobles productos carga*corriente.
La conservación no es exacta pero el error es del orden de v_o^2/c^2, podemos suponer que es bastante bajo porque las velocidades normales de escala humana cumplen generalmente la condición $(v_o/c)\ll 1$ con un margen de varios órdenes de magnitud.

En el capítulo 4 estudiaremos la métrica cuadridimensional y le daremos sentido a esa "rareza". Por el momento podemos correlacionarla con la sección 2.3 "Anticipo métrico".
Hasta ahora el cuadrivector carga-corriente solo participó de la ecuación de continuidad $\partial 4 \cdot J4 = 0$
Si lo combinamos consigo mismo y le aplicamos el producto escalar de signo cambiado, tendríamos:
$\langle J4, J4\rangle = J^2 - c^2.\rho^2$
Con el agregado del término nuevo en la relación ρ vs. ρ' estamos más cerca de encontrar una invarianza de esta cantidad, igual que vimos antes con otras parejas como $\langle F4,U4\rangle=\langle F'4,U'4\rangle$, $\langle A4,U4\rangle=\langle A'4,U'4\rangle$ y $\langle K4,X4\rangle = \langle K'4,X'4\rangle$.

Otro tema a analizar es el hecho de que las magnitudes se "*contagian*" unas a otras en la medida en que participan de ecuaciones conjuntas.
Por ejemplo, la ecuación de continuidad y la condición de calibre Lorenz eran invariantes en su primera versión tentativa, cuando solo considerábamos $[\rho=\rho', J_x=J_x'+v_o.\rho']$ y $[\Phi=\Phi', A_x=A_x'+v_o/c^2.\Phi']$.
Ahora que introdujimos las supuestas *correcciones o mejoras* relativistas $[\rho=\rho'+v_o/c^2.J'_x, \Phi=\Phi'+v_o.A'_x]$ se compromete la invarianza al pasar de un sistema a otro.
En un principio podemos despreocuparnos de la condición de calibre de Lorenz y posponer para más adelante su estudio. Pero la ecuación de continuidad merece atención más inmediata porque involucra algo serio como la conservación local de la carga.
El enfoque relativista en el que nos estamos embarcando propone tratar a la diferencia ρ vs. ρ' no como una carga ilusoria o virtual sino como una **carga real** que debería cumplir las leyes de conservación también en el referencial móvil Σ'.

3.3.1 Conservación de la carga:

Demostración:
Partimos del sistema Σ donde suponemos (¡esperamos!) que debe cumplirse la ecuación de continuidad.
$\nabla\cdot\vec{J} + \partial_t\rho = 0$ Reemplazamos $\vec{J}=\vec{J'}+\rho'.\vec{v_o}$ $\rho=\rho'+\vec{v_o}\cdot\vec{J'}/c^2$.

$\nabla\cdot(\vec{J}'+\rho'.\vec{v_o}) + \partial_t(\rho' + \vec{v_o}\cdot\vec{J}'/c^2) = 0$

$\nabla\cdot\vec{J}'+\nabla\cdot(\rho'.\vec{v_o}) + \partial_t(\rho' + \vec{v_o}\cdot\vec{J}'/c^2) = 0$ Calculamos divergencia de un escalar por un vector fijo

$\nabla\cdot\vec{J}'+\vec{v_o}\cdot\nabla(\rho') + \partial_t(\rho' + \vec{v_o}\cdot\vec{J}'/c^2) = 0$ Separamos ρ' y $\vec{J}'$

$\nabla\cdot\vec{J}'+\partial_t\vec{v_o}\cdot\vec{J}'/c^2 + \partial_t\rho'+\vec{v_o}\cdot\nabla(\rho') = 0$

$\nabla\cdot\vec{J}'+\partial_t\vec{v_o}\cdot\vec{J}'/c^2 + (\partial_t + \vec{v_o}\cdot\nabla)\,\rho' = 0$ identificamos $\partial_{t'} = \partial_t + \vec{v_o}\cdot\nabla$

$\nabla\cdot\vec{J}'+\partial_t\vec{v_o}\cdot\vec{J}'/c^2 + \partial_{t'}\,\rho' = 0$

$\nabla\cdot\vec{J}'+\partial_t\vec{v_o}\cdot\vec{J}'/c^2 + \partial_{t'}\,\rho' = 0$ proyectamos en la dirección-x de la velocidad

$\nabla\cdot\vec{J}'+\partial_t(v_o\cdot J_x')/c^2 + \partial_{t'}\,\rho' = 0$

$\nabla\cdot\vec{J}'+\mathbf{v_o/c^2.\partial_t J'_x} + \partial_{t'}\,\rho' = 0$

La ecuación no queda invariante por causa del término rojo $\mathbf{v_o/c^2.\partial_t J'_x}$.
Este es un caso muy serio porque trata sobre la conservación de la carga. Si se cumple en un sistema y falla en otro, ¿adónde va a parar la diferencia de carga? ¿A otra dimensión? ¿A un "*hiperespacio*" ?
La carga no puede estar desapareciendo o apareciendo de la nada. Lo que está ocurriendo es un problema matemático: los cuadrivectores no se están transformando todos de la misma manera.
Las transformaciones de la cuadriderivada y del cuadrivector espacio-tiempo están necesitando los términos que completan la simetría y que ya aparecieron en otros cuadrivectores. Tendremos que *abandonar la transformación de Galileo* y sustituirla por una nueva versión que resuelva estas incompatibilidades.

Una forma de restaurar la invarianza de la ecuación de continuidad, y por lo tanto la conservación de la carga eléctrica, es considerar que ese término "parásito" queda absorbido por la divergencia $\nabla'\cdot\vec{J}'$ de la siguiente manera:

$\nabla'\cdot\vec{J}' = \nabla\cdot\vec{J}'+\partial_t(\vec{v_o}\cdot\vec{J}'/c^2)$ $\qquad \partial_{x'}J'_x = \partial_x J'_x + \mathbf{v_o/c^2.\partial_t J'_x}$

A partir de ahora deberemos distinguir $\nabla' \neq \nabla$, de acuerdo con estas fórmulas modificadas:

$\partial_{t'} = \partial_t + v_o.\partial_x$ $\qquad \partial_{x'} = \partial_x + v_o/c^2.\partial_t$ $\qquad \partial_{y'} = \partial_y$ $\qquad \partial_{z'} = \partial_z$

Esto indirectamente repercute en las coordenadas del espacio-tiempo, porque según la regla de la cadena debería cumplirse: $\partial_{x'} = \partial x/\partial x'.\partial_x + \partial t/\partial x'.\partial_t$
Y estaríamos identificando $\partial x/\partial x'=1$ y $\partial t/\partial x' = v_o/c^2$

Lo que nos lleva entonces a pensar en esta modificación:

$t = t' + v_o/c^2.x'$
$x = x' + v_o.t'$

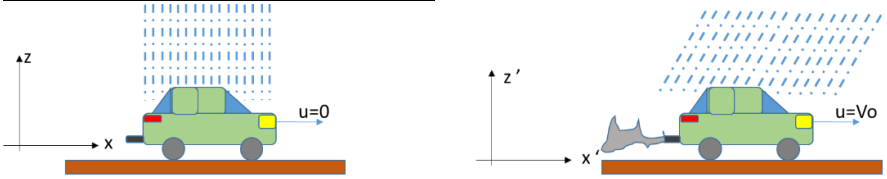
El término resaltado en amarillo está insinuando algo muy fuerte, y es la posibilidad de que tal vez sea necesario abandonar la idea de tiempo absoluto y aceptar un **tiempo relativo**, un tiempo que transcurre diferente para dos observadores en movimiento rápido uno respecto al otro.

A esto nos viene conduciendo el requerimiento de que las leyes físicas deban tener la misma forma al pasar de un referencial a otro. Todas las magnitudes deben transformarse usando el mismo jacobiano.

- Inicialmente la Transformación de Galileo del diferencial de coordenadas marcó el rumbo que debían seguir los restantes cuadrivectores contravariantes. El cuadrigradiente, transformado según la transformación inversa de Galileo, marcó el rumbo de los restantes objetos covariantes.
- Luego fueron surgiendo indicios de que las cuaternas covariantes también alteran su parte espacial, lo que conduce a $\nabla\neq\nabla'$.
- De igual manera, $\rho'\neq\rho$ y $\Phi'\neq\Phi$ nos lleva a plantearnos $t'\neq t$.

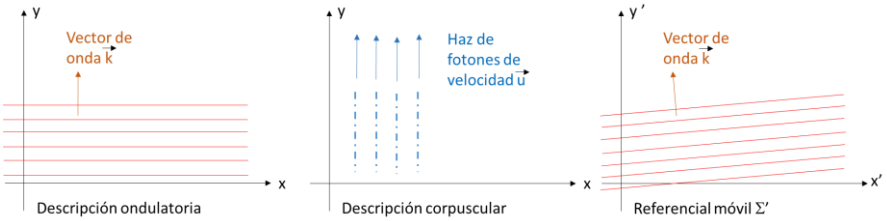
Por un momento puede parecer que no hay nada constante a lo que podamos "aferrarnos": cambia la densidad de carga 'ρ', cambia la fuerza $\vec{F}$, el potencial magnético $\vec{A}$ … ¡y ahora resulta que también cambia el tiempo 't'! Pero en realidad sí hay algo que se mantiene constante en este enfoque: la forma de las ecuaciones físicas y las fórmulas de transformación de las magnitudes al pasar de un sistema a otro.

3.3.2 Lluvia en la carretera:



Si nos subimos a un vehículo que tiene inclinado el vidrio trasero, observamos que se moja cuando llueve en forma vertical. Sin embargo, cuando viajamos en carretera, es un hecho comprobable que a partir de cierta velocidad la lluvia se inclina más que el vidrio y ya no moja.
En el sistema de referencia Σ' que acompaña a nuestro vehículo, la velocidad de la lluvia adquiere una componente $-v_o.\hat{x}$ que se suma vectorialmente a la velocidad de caída $-v_f.\hat{z}$.
¿Esto qué tiene que ver con el Electromagnetismo y con la Teoría de la Relatividad?

Supongamos que en vez de gotas de lluvia estamos atravesando en forma transversal un radioenlace de ondas electromagnéticas. Asumimos que las ondas provienen de un origen muy lejano y es válido aproximar mediante planos los frentes de onda.



$\vec{k}=k.\hat{y}$ es el vector de onda, siendo $k=\omega/c$.
De acuerdo con un enfoque ondulatorio, las radioondas se describen mediante una función de onda armónica con variación $f(\vec{r},t)=A.e^{j.(\omega.t-k.y)}$.
¿Cómo se ve esto desde un referencial Σ' solidario a un vehículo con velocidad $v_o.\hat{x}$?
Si aplicamos la transformación de Galileo t=t', y=y', la fase de las ondas se convierte en $\phi= k.y' - \omega.t'$.
Para un cierto t', los lugares geométricos de fase constante son rectas y'=cte, de vector normal $\hat{y}$.
Las ondas parecen viajar solamente en dirección y', no hay ninguna componente según x'.

Esto es incompatible con la visión corpuscular: los fotones que transportan la energía electromagnética deberían propagarse en Σ' con una velocidad relativa $\vec{u'}$ inclinada, igual que ocurre con las gotas de lluvia (aunque en magnitud mucho menor porque se mueven mucho más rápido $c \gg v_o$).

Estamos necesitando incluir el término relativista que altera el tiempo: $t = t' + v_o/c^2.x'$.
Realizamos esta sustitución en el ángulo de fase de la onda:

$\phi= k.y - \omega.t$ → y=y', $t= t' + v_o/c^2.x'$, $\phi=\phi'$
$\phi'= k.y' - \omega.(t'+v_o/c^2.x')$
$\phi'= k.y' - \omega.(t'+v_o/c^2.x')$ → reagrupamos
$\phi'= k.y' - \omega.v_o/c^2.x' - \omega.t'$ → sustituimos $\omega=c.k$
$\phi'=k.(y' - v_o/c.x') - \omega.t'$

Ahora los lugares geométricos de fase constante, para un cierto t', toman la forma $y'=v_o/c.x' + cte$.
En el referencial Σ' son rectas inclinadas un ángulo θ respecto a la horizontal, siendo $tg(\theta)=v_o/c$.
El vector de onda $\vec{k'}$, perpendicular a esos frentes de onda, tiene entonces la inclinación θ que esperaríamos observar en las partículas energéticas (fotones).
Visto de otra manera: la fase es de la forma $\phi'=\vec{k'}\cdot\vec{r'} - \omega'.t' = k'_x.x' + k'_y.y' - \omega'.t'$, con $\vec{k'}=k/c.(c.\hat{y}-v_o.\hat{x})$.

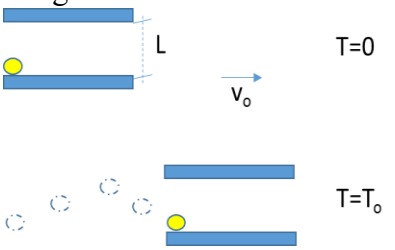
Otro detalle: Si aplicamos las asociaciones entre ***K4*** y las derivadas $\partial 4$ para exponenciales complejas, la nueva regla de transformación $k'_x = k_x - \omega.v_o/c^2$ significa $\partial'_x = \partial_x + v_o/c^2.\partial_t$ (general para cualquier ley física, no solo para funciones de onda armónica).
Ejercicio: Correlacionar este escenario con la aberración estelar descrita en 2.3.5

3.3.3 ¿Tiempo relativo al observador?

Juntamos ahora dos de las "rarezas" que se empiezan a insinuar en secciones anteriores:

- 2.3.3 →Si las ecuaciones de Maxwell deben tener la misma forma en Σ y en Σ', y la ecuación de ondas también porque es una consecuencia de ellas, entonces en el vacío la velocidad de propagación de las ondas debería ser la misma vista desde ambos referenciales $c^2=1/(\mu_o.\epsilon_o)$.
- 3.3.1 →Las medidas de tiempo deben ser diferentes según el observador, para poder cumplir tanto en Σ como en Σ' con la conservación local de la carga eléctrica.

Un posible experimento que junta ambos conceptos se llama "reloj de luz" (en inglés "*light clock*"), y consiste en un rayo de luz que rebota periódicamente entre dos placas metálicas paralelas separadas una distancia 'L'.
Llamamos Σ' al referencial solidario al reloj, donde el período verifica $T_o'=2L/c$.
Luego miramos el fenómeno desde otro referencial Σ en el cual las placas se ven móviles con velocidad v_o.



t=0 el rayo sale disparado desde la placa inferior, hacia "*arriba*" en el dibujo.
t=$T_o/2$ ocurre la reflexión en la placa superior, el rayo comienza a "*bajar*" en el dibujo.
t= T_o la luz vuelve a la placa inferior y se repite el ciclo de oscilación.
La esfera amarilla representa la zona de máxima intensidad luminosa, en determinado instante.
En punteado se dibujan algunos de los instantes intermedios anteriores, como si el rayo dejara "rastro".

Desde el punto de vista del referencial Σ, el rayo recorre durante un período completo T_o:

→distancia horizontal = $v_o.T_o$
→distancia vertical = 2L = $c.T'_o$
→distancia total = $c.T_o$ bajo la hipótesis de que la velocidad es 'c' en ambos referenciales.

Se forma un triángulo rectángulo, y por Pitágoras calculamos:

$\text{total}^2 = \text{horizontal}^2 + \text{vertical}^2$
$(c.T_o)^2 = (v_o.T_o)^2 + (c.T'_o)^2$
$c^2.T_o^2 - v_o^2.T_o^2 = c^2.T'^2_o$
$T_o^2\,(1- v_o^2/c^2) = T'^2_o$

$$T'_o = T_o.\sqrt{1- v_o^2/c^2}$$

Este experimento muestra que los fenómenos raros están todos relacionados entre sí, y unos llevan a otros. Quien haya resuelto con éxito el ejercicio propuesto en 3.2.5 ya se encontró con esta raíz, al menos desde el punto de vista matemático. Aquí le vemos una posible interpretación física, y en próximas secciones nos volverá a aparecer esta raíz en forma cada vez más frecuente.

3.4 Transformación de Lorentz.

Llegamos al punto en que todos nuestros cuadrivectores, incluidos el tiempo-espacio y el operador de derivadas, responden de acuerdo a las deducciones recientes a este jacobiano de transformación:

$$[Jac]= \begin{bmatrix} 1 & v_o/c & 0 & 0 \\ v_o/c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los primeros ejemplos del capítulo 2 parecían dar la ilusión de que las cuaternas covariantes alteraban solo su parte temporal, mientras que las contravariantes se afectaban solo en su parte espacial.
A lo largo de este capítulo 3 fue quedando en evidencia que todas las magnitudes alteran en un pie de igualdad tanto la parte espacial como la temporal.

3.4.1 Inversión de las fórmulas:

Como observamos antes, el inverso de este jacobiano no guarda la simetría necesaria. El determinante vale $J=1-v_o^2/c^2$ y la fórmula de inversión matricial por adjuntos revela que aparecen casilleros de valor $-(v_o/c)/J$ en los lugares en donde debería aparecer solo $-(v_o/c)$.
Podríamos contentarnos con los avances logrados hasta este punto, ya que habríamos erradicado los errores de primer orden v_o/c y subsistiría un residuo de segundo orden $(v_o/c)^2$.

Pero también podemos aspirar a algo más ambicioso que sea extrapolable fuera de la región de las bajas velocidades. La formulación estaría completa si el jacobiano inverso tuviera exactamente la misma forma que el original salvo un cambio de signo en la velocidad, porque al fin al cabo volver de Σ' a Σ se lograría con un desplazamiento a velocidad $-\vec{v_o}$.
La simetría se restaura utilizando la raíz del determinante, y aparece el mismo factor $\gamma=1/\sqrt{1-v_o^2/c^2}$ que era sugerido en el reloj de luz de 3.3.3. Las nuevas fórmulas de transformación quedan:

$t = \gamma.(t' + v_o/c^2.x')$	$x = \gamma.(x' + v_o.t')$	$y = y'$	$z = z'.$
$t' = \gamma.(t - v_o/c^2.x)$	$x' = \gamma.(x - v_o.t)$	$y' = y$	$z' = z .$

$$[Jac]= \begin{bmatrix} \gamma & \gamma.v_o/c & 0 & 0 \\ \gamma.v_o/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Inverso } [Jac^{-1}]= \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma.v_o/c & 0 & 0 \\ -\gamma.v_o/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si no tuviéramos la inspiración de tomar la raíz del determinante, procederíamos planteando un factor incógnito 'γ' y lo despejaríamos imponiendo la condición de que los nuevos jacobianos modificados tengan ahora determinante unitario: $\det([Jac])=\det([Jac^{-1}])= \gamma^2 - \gamma^2.v_o^2/c^2=\gamma^2.(1-v_o^2/c^2)=1$.
La simetría está asegurada porque $\gamma(+v_o)= \gamma(-v_o)$,
$\gamma(+v_o)$ se utiliza para calcular x(t',x',y',z') y $\gamma(-v_o)$ para obtener x'(t,x,y,z) en el sentido opuesto.

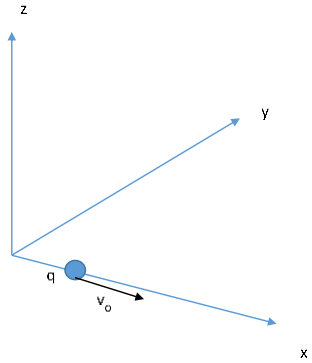
Estos nuevos jacobianos deben aplicar a *todos* los cuadrivectores vistos hasta el momento:

Tiempo-espacio	Cuadri-derivada
Carga-corriente	Cuadri-potencial
Cuadri-velocidad	Potencia-fuerza
Cuadrivector de onda	

Se llama Transformación de Lorentz a la fórmula de conversión de coordenadas que sustituye (generaliza) a la Transformación de Galileo, y se llama gamma de Lorentz al factor $\gamma=1/\sqrt{1-v_o^2/c^2}$

3.4.2 Carga puntual en movimiento uniforme:

Se presenta a continuación un problema electromagnético en el cual aparece el factor gamma de Lorentz.



Suponemos una carga puntual 'q' ubicada en y=0 z=0 que se desplaza con velocidad uniforme $v_o\vec{}$ a lo largo del eje $x\vec{}$ siguiendo la trayectoria $x=v_o.t$.

Si la carga estuviera en reposo esperaríamos encontrarnos con la ecuación estática de Poisson $\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_o$.

Pero estamos en un caso dinámico. Observamos una distribución volumétrica de carga que varía en el espacio y en el tiempo, que podemos describir con la función Delta de Dirac: $\rho(x,y,z,t)=q.\delta(x-v_o.t).\delta(y).\delta(z)$.

La ecuación de Poisson estática (laplaciano) pasa a ser la ecuación de ondas (d'Alembertiano) en Σ:

$$\partial_x^2\,\Phi + \partial_y^2\,\Phi + \partial_z^2\,\Phi \;-1/c^2\,\partial_t^2\,\Phi = -\rho/\epsilon_o = -q/\epsilon_o.\delta(x-v_o.t).\delta(y).\delta(z)$$

Reescribimos en función de nuevas variables t',x',y',z'

$t'=t$, $\quad x'=x-v_o.t$, $\quad y'=y$, $\quad z'=z$

$\partial_t = \partial'_t - v_o.\partial'_x$, $\quad \partial_x = \partial'_x$, $\quad \partial_y = \partial'_y$, $\quad \partial_z = \partial'_z$

$$(1-v_o^2/c^2).\partial'^2_x\,\Phi + \partial'^2_y\,\Phi + \partial'^2_z\,\Phi \;+2.v_o/c^2.\partial'_x\partial'_t\,\Phi - 1/c^2\,\partial'^2_t\,\Phi = -q/\epsilon_o.\delta(x').\delta(y').\delta(z')$$

Como la variable t' no aparece del lado derecho de las fuentes, podemos buscar soluciones $\Phi(x',y',z')$ que no dependan de t', con lo cual nos despreocupamos por el momento de las derivadas ∂'_t.

$$(1-v_o^2/c^2).\partial'^2_x\,\Phi + \partial'^2_y\,\Phi + \partial'^2_z\,\Phi = -q/\epsilon_o.\delta(x').\delta(y').\delta(z')$$

No está quedando un laplaciano "limpio" ∇^2 debido a que la coordenada x' en el sentido del movimiento sufre una asimetría respecto a las demás y', z'.

Podemos arreglar esta asimetría definiendo nuevas variables mayúsculas X,Y,Z:

$X=\gamma.x'$, $Y=y'$, $Z=z'$ ajustando la constante γ tal que: $\gamma^2=1/(1-v_o^2/c^2)$

$\partial_x'=\gamma.\partial_X$

$$(1-v_o^2/c^2).\gamma^2.\partial_X^2\Phi + \partial_Y^2\Phi + \partial_Z^2\,\Phi = -q/\epsilon_o.\delta(X/\gamma).\delta(Y).\delta(Z)$$

$$(1-v_o^2/c^2).\gamma^2.\partial_X^2\Phi + \partial_Y^2\Phi + \partial_Z^2\,\Phi = -q/\epsilon_o.\delta(X/\gamma).\delta(Y).\delta(Z)$$

$$\partial_X^2\,\Phi + \partial_Y^2\,\Phi + \partial_Z^2\,\Phi = -q/\epsilon_o.\delta(X/\gamma).\delta(Y).\delta(Z)$$

Ahora en las nuevas variables la ecuación diferencial tiene exactamente la forma de Laplace-Poisson y se conocen sus soluciones. Aplicamos a continuación dos resultados que sugerimos demostrar como ejercicios:

$1 \rightarrow \delta(X/\gamma) = \gamma.\delta(X)$ $\qquad 2 \rightarrow \nabla^2(1/R) = -4.\pi.\delta(R)$

siendo $R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ la distancia al origen en coordenadas esféricas

Entonces $\Phi(X,Y,Z) = \gamma.q/(4\pi\epsilon_o.R)$ $\qquad$ con $R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$

Deshaciendo la cadena de cambios de variables $X,Y,Z \rightarrow x',y',z' \rightarrow x,y,z,t$ llegamos a:

$$\Phi(x,y,z,t) = \gamma.q/(4\pi\epsilon_o)/\sqrt{\gamma^2(x-v_o.t)^2+y^2+z^2}$$

Ejercicio (advertencia: ¡muy trabajoso!): Demostrar esto mismo a partir de los potenciales de Lienard-Wiechert, basados en la idea de los potenciales retardados.
Sugerimos consultar algún texto sobre Electromagnetismo o Electrodinámica, y en caso de duda complementar con la solución presentada en el capítulo 15.

Reflexión: La variable $X=\gamma.(x-v_o.t)$ se utilizó en un principio como un artificio matemático para llevar la ecuación diferencial a la forma de Laplace-Poisson, forma para la que hay disponibles numerosos estudios sobre sus funciones solución. La definición de X(x,t) no estaba pensada como fórmula para el cambio de coordenadas entre referenciales en movimiento relativo Σ, Σ'.
Sin embargo, vemos que *$X=\gamma.(x-v_o.t)$ parece ser un mejor candidato que $x'=(x-v_o.t)$* para describir la abscisa en el referencial Σ' solidario a la carga móvil. ¡Tiene significado *físico*!
Si describimos el espacio Σ' con coordenadas t',x',y',z' (que podríamos llamar *coordenadas galileanas*) los campos y potenciales no tienen simetría esférica alrededor de la carga puntual; deberíamos modelar mediante el éter esa pérdida de simetría.
Las coordenadas de Lorentz X,Y,Z (con el factor) permiten recuperar la simetría esférica. En armonía con el hecho de que en este referencial Σ' la carga está quieta y el problema es puramente electrostático, entonces tiene sentido que los viajeros solidarios a ese referencial midan un potencial acorde con la fórmula de Coulomb.

$$\Phi'(X,Y,Z) = q/(4\pi\epsilon_o)/ \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \qquad \Phi=\gamma.\Phi'$$

Estamos en un caso particular de la transformación de Lorentz del cuadripotencial ***A4***:
$\Phi=\gamma.(\Phi' + v_o.A'_x)$ cuando $A'_x=0$.

Anticipo métrico: Cuando estudiemos la Relatividad General, veremos que cualquier sistema de coordenadas es válido. Siempre que esté acompañado de una "receta métrica" sobre cómo medir distancias y tiempos.
Por ejemplo, el sistema de coordenadas cilíndricas (r, φ, z) incluye una coordenada angular 'φ' que mide radianes en lugar de metros. Para convertir de radianes a metros, es necesario multiplicar los desplazamientos dφ por un factor de escala 'r' (la distancia al eje polar).
Si aplicamos los conceptos métricos al contexto de las coordenadas galileanas (t', x', y', z'), observamos que hay experimentos en los que la coordenada t' difiere de las mediciones de los relojes que viajan solidarios a Σ', o que las coordenadas x' no coinciden con lo que miden las reglas en el referencial Σ'. Las coordenadas de Lorentz tienen la ventaja de una mayor correlación métrica: las reglas miden (X,Y,Z) y los relojes miden 'T'.

Ejercicios: Independientemente de cómo interpretemos las coordenadas x' o X en Σ', el hecho es que hay detalles interesantes que pueden observarse en las coordenadas originales Σ(t,x,y,z).

a) Mostrar que el potencial de Lienard-Wiechert puede escribirse como:
$$\Phi(x,y,z,t) = q/(4\pi\epsilon_o)/ \sqrt{(x-v_o.t)^2+(1-v_o^2/c^2)(y^2+z^2)}$$
b) Si la carga se mueve exactamente a la velocidad de la luz, hay una región del espacio donde el denominador se anula y el potencial diverge. Mostrar que esta región es el plano de ecuación $x=v_o.t$ transversal a la trayectoria de la carga móvil.
c) Si la carga se mueve más rápido que la luz, hay una región del espacio donde el radicando se vuelve negativo y la fórmula para el potencial Φ produce resultados complejos (imaginarios). Mostrar que esta región es el interior (o exterior) de un cono. Si interpretamos las soluciones de la ecuación de onda como potenciales retardados, podemos imaginar que esta *rareza* se debe a que la carga llega al punto de análisis antes que la información sobre su presencia. Las soluciones Φ serían entonces potenciales *adelantados*, no atrasados.

Estos detalles nos invitan a reflexionar que las cargas moviéndose más rápido que la luz dan problemas: producen valores infinitos o complejos, sacuden las relaciones de causalidad…
Esperamos que las leyes de la Mecánica se modifiquen respecto a las de Newton y Galileo, para de alguna manera evitar que los objetos cargados alcancen la velocidad de la luz.
Más aún: toda la materia que conocemos está formada por partículas cargadas, incluso los cuerpos macroscópicos no ionizados con balance neto nulo → entonces esta restricción deberá aplicarse a todos los cuerpos físicos, no solo a las cargas microscópicas.

Actividad propuesta: En los años en que la Relatividad Especial se estaba desarrollando (~1890 a ~1910), no se conocían los aceleradores de partículas. Desde entonces la ciencia y la tecnología avanzaron significativamente, y ya hubo oportunidad de verificar estos fenómenos. A quienes tengan interés los invitamos a buscar información sobre las máximas velocidades a las que se logra acelerar a las partículas. ¿Será u=0.99c? ¿Tal vez u=0.999c? ¡Averigüemos!

3.4.3 Postulados de la Relatividad Especial:

Resumiendo los capítulos 2 y 3: todas las fórmulas desarrolladas hasta el momento, que culminan en la Transformación de Lorentz con su factor γ, descansan en dos hipótesis o postulados:

- **Postulado-1**. Relatividad: las leyes físicas deben mantener la forma matemática al cambiar de referencia entre dos sistemas inerciales Σ y Σ' en movimiento relativo uniforme.
- **Postulado-2**. Constancia de la velocidad de la luz: $c'=c\ \forall\Sigma'$.

A la fecha de redacción de este documento, los resultados experimentales concuerdan con ambas hipótesis.

Cerramos este capítulo 3 con una invitación a reflexionar: ¿es realmente necesario este segundo postulado? ¿No podríamos pensar que el postulado-2 es redundante y está contenido dentro del postulado-1?
Al fin y al cabo, la velocidad de la luz surge de la ecuación de ondas, que no es más que un caso particular de una ley física que debe mantener su invarianza al alternar entre sistemas en movimiento relativo.

La Teoría de la Relatividad está asociada a la idea de que no hay ningún sistema privilegiado absoluto, solo importa el movimiento relativo $\vec{v_o}$ para convertir magnitudes entre Σ y Σ'.

Recordemos que las teorías pre-relativistas suponían la existencia de un éter que llenaba todo el espacio vacío. Bajo la hipótesis de que estamos rodeados de un inmenso "*océano de éter*", los sistemas Σ y Σ' que acabamos de analizar no tendrían la simetría total que requiere la Teoría de la Relatividad.

- Σ: Sería un sistema privilegiado, solidario respecto al éter. En Σ vemos una carga puntual en movimiento uniforme y le aplicamos las ecuaciones de Maxwell $\nabla^2\Phi - 1/c^2.\partial_t^2\Phi = -\rho/\epsilon_o$
- Σ': Sería un sistema no privilegiado. Aquí vemos una carga puntual en reposo y también vemos una "*corriente de éter*" o un "*viento de éter*" uniforme moviéndose a velocidad $-\vec{v_o}$. No estaría garantizado, en principio, que se cumplieran las ecuaciones del Electromagnetismo en su misma forma. Ese éter podría ser el causante de la pérdida de simetría esférica.

El segundo postulado es entonces equivalente a afirmar que no existe tal éter.
O, en caso de que exista, no tiene ningún efecto eléctrico o magnético que obligue a incorporar factores o términos correctores a las ecuaciones de Maxwell. Al momento de escribir este trabajo, no se observó experimentalmente ninguno de los posibles efectos que serían atribuibles al éter:

- enlentecer ($c'=c-v$) o acelerar ($c'=c+v$) las ondas de luz en la dirección del movimiento (2.3.3, 2.3.5).
- cancelar el efecto magnético de las corrientes de arrastre para mantener $\vec{B}=\vec{B'}$ (3.2.3).
- Mantener intacto el vector de propagación $\vec{k'}=\vec{k}$ en ondas perpendiculares al movimiento (3.3.2).
- Alterar la simetría esférica en una carga puntual con movimiento uniforme, cuando se observa desde su referencial solidario (3.4.2).

Los habitantes de Σ' están entonces facultados para describir el problema electromagnético con las mismas ecuaciones de Maxwell. El problema de la carga puntual se simplifica y se reduce a la ecuación de Poisson, ya que la fuente única es la carga 'q' que aquí se ve quieta.

Las descripciones de Σ(t,x,y,z) y de Σ'(T,X,Y,Z) son reconciliables si las coordenadas y las derivadas (¡y también los potenciales!) se transforman según las fórmulas de Lorentz:

$T=\gamma.(t-v_o.x/c^2)$	$X=\gamma.(x-v_o.t)$	$Y=y$	$Z=z$
$\partial_T=\gamma.(\partial_t+v_o.\partial_x)$	$\partial_X=\gamma.(\partial_x+v_o/c^2.\partial_t)$	$\partial Y=\partial y$	$\partial Z=\partial z$
$\Phi'=\gamma.(\Phi-v_o.A_x)$	$A_X'=\gamma.(A_x-v_o/c^2.\Phi)$	$A'_Y=A_y$	$A'_Z=A_z$

Si estudiáramos una antena móvil en lugar de una carga móvil, el panorama relativista sería el siguiente:

- La ecuación de ondas es válida en ambos sistemas:
  $\nabla^2\Phi-1/c^2.\partial_t^2\Phi=-\rho/\epsilon_o$ $\quad$ $\nabla'^2\Phi'-1/c^2.\partial'^2_t\Phi'=-\rho'/\epsilon_o$
  $\nabla^2\vec{A}-1/c^2.\partial_t^2\vec{A}=-\mu_o\vec{J}$ $\quad$ $\nabla'^2\,\vec{A}'-1/c^2.\partial'^2_t\vec{A}'=-\mu_o\,\vec{J}'$
- Las coordenadas (ct,x,y,z)→(ct',x',y',z') deben transformarse mediante las fórmulas de Lorentz.
- Lo mismo para los operadores de derivación $(\partial_{ct}\,,\nabla)\rightarrow(\partial'_{ct}\,,\nabla')$, los potenciales $(\Phi/c,\vec{A})\rightarrow(\Phi'/c,\vec{A'})$ y las fuentes de carga-corriente $(c.\rho,\vec{J})\rightarrow(c.\rho',\vec{J'})$

<u>Aclaración</u>: De ahora en adelante dejaremos de utilizar letras mayúsculas. Las coordenadas en Σ' seguirán siendo de Lorentz (con el factor gamma), pero las anotaremos ct',x',y',z' en lugar de (cT,X,Y,Z).

<u>Ejercicio</u>: Los resultados $\vec{c'}=\vec{c}-\vec{v_o}$ de la aberración estelar 2.3.4 parecían contradecir a los de Michelson y Morley porque insinuaban que la Tierra no era un sistema privilegiado por tener c'≠c.

Demostrar que la aplicación de las fórmulas de Lorentz conduce a $\vec{c'}=(\vec{c}-\vec{v_o})/\gamma$, con $\gamma=1/\sqrt{1-v_o^2/c^2}$.

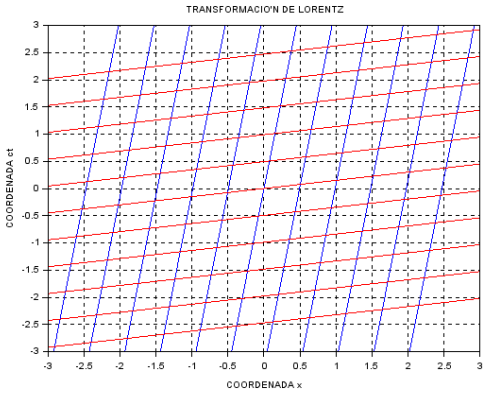
Entonces no hay ningún conflicto porque $|\vec{c'}|=c$, y la Tierra no deja de ser un referencial privilegiado.
De hecho, la Relatividad sugiere que todos los sistemas Σ' inerciales son privilegiados y equivalentes, los trata a todos en un pie de igualdad.

4. TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ.

En el capítulo anterior construimos una transformación de coordenadas que mantiene invariantes las leyes del Electromagnetismo, en la forma exacta en que fueron inicialmente enunciadas antes de la Relatividad Especial. Esta transformación se puede escribir en su forma directa o en su forma inversa:

$t = \gamma.(t' + v_o/c^2.x')$	$t' = \gamma.(t - v_o/c^2.x)$
$x = \gamma.(x' + v_o.t')$	$x' = \gamma.(x - v_o.t)$
$y = y'$	$y' = y$
$z = z'$	$z' = z$

En ambas formas aparece el mismo factor $\gamma=1/\sqrt{1-v_o^2/c^2}$. En el régimen "clásico" tenemos $v_o \ll c$ y $\gamma \approx 1$, los efectos relativistas solo se manifiestan a mayores velocidades cuando 'γ' aumenta en forma apreciable $\gamma>1$.
A continuación se ve la representación gráfica en un diagrama espacio-tiempo.

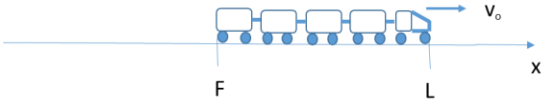


- Las rectas azules son los lugares geométricos que tienen constante la coordenada x'.
  De acuerdo con las fórmulas de Lorentz, estas rectas azules son de la forma $x=v_o.t + x'/\gamma$.
  Tienen todas igual pendiente y cortan en distinto punto a los ejes coordenados.
- Las rectas rojas son los lugares geométricos que tienen constante la coordenada t'.
  Su forma es $t = v_o/c^2.x + t'/\gamma$, todas tienen la misma pendiente pero difieren en el lugar donde cortan los ejes coordenados.
  Se llaman líneas de simultaneidad en Σ' y no coinciden con las líneas de simultaneidad de Σ, lo que muestra una de las manifestaciones de la Teoría de la Relatividad: *la simultaneidad entre eventos no es absoluta sino relativa al punto de vista del observador*.
- Respecto a los vectores base: $\vec{E'_{ct}}$ es paralelo a las líneas azules y $\vec{E'_x}$ es paralelo a las líneas rojas.
  Aquí se inclinan ambos ejes, hay una diferencia con la figura del capítulo 1.5.2 donde veíamos que la Transformación de Galileo solo cambiaba la inclinación del eje temporal.

Es frecuente aplicarle a la coordenada temporal un factor de escala para convertirla en 'ct'. Entonces los fenómenos que se desplazan a la velocidad de la luz (ej: x=ct) se visualizan a 45 grados en el dibujo. Y se cumple la particularidad de que las líneas azules forman con el eje vertical el mismo ángulo θ que forman las líneas rojas con el eje horizontal. Este ángulo θ verifica $tg(\theta)=v_o/c$.
El cociente adimensionado v_o/c se anota como 'β' en varias publicaciones sobre Relatividad.
A continuación intentaremos re-visitar algunos cálculos de capítulos anteriores a la luz de dos nuevos conceptos que surgen de esta transformación: contracción de longitudes y dilatación temporal.

4.1 Contracción de longitudes.

Analizamos un tren que se mueve a velocidad constante $\vec{v_o}$ en la dirección 'x'.



L=locomotora, F=furgón de cola (último vagón)

Las trayectorias de los puntos extremos que definen al tren en el referencial Σ son:

$x_F(t) = v_o.t$

$x_L(t) = v_o.t + H$

Aplicamos a cada una de las trayectorias la transformación de Lorentz $x' = \gamma.(x - v_o.t)$
para ver cómo queda todo en el referencial Σ' solidario al tren.

$x'_F(t') = 0$	$\forall t'$	Es constante porque en este referencial Σ'el furgón se ve quieto en el origen.
$x'_L(t') = \gamma.H$	$\forall t'$	También es constante porque en este referencial Σ' la locomotora está quieta. Pero es una constante diferente de la de Σ.

$H' = x'_L - x'_F$ es el tamaño del tren visto en su referencial solidario Σ', se llama longitud propia.
$H = H'/\gamma$ es el tamaño visto desde Σ, $H<H'$ debido a que $\gamma>1$.
Estas fórmulas muestran que *los objetos móviles se ven contraídos respecto a su longitud propia por un factor 'γ' en la dirección de su movimiento.* El fenómeno se llama contracción de Lorentz-Fitzgerald.

Observación:
Cuando enunciamos que los objetos móviles se "*ven*" más cortos, *no se trata de una ilusión óptica* ni de una foto que sale "*movida*" o borrosa por causa de la velocidad del objeto. Se trata de una afirmación sobre las coordenadas (t,x) que utilizamos en el sistema Σ para describir los sucesos reales.
Si en algún momento realizamos medidas ópticas o visuales para detectar los extremos del tren, luego ejecutamos los cálculos necesarios (post-procesamiento) para contemplar el retardo finito de propagación de la luz hasta nuestros ojos o nuestros sensores. Cuando transportamos todos los eventos a nuestro mapa espacio-tiempo → vemos que en cada instante 't', la locomotora y el furgón están separados una distancia $H = x_L(t) - x_F(t)$ que es menor a la distancia propia por un factor $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_o^2/c^2}$.

Experimento:
Imaginamos que se construye un tren de tamaño H=100 metros, con capacidad de alcanzar velocidades tan altas como un tercio de la velocidad de la luz: v=c/3.
Para v=c/3, los factores de Lorentz que esperamos encontrar son:

$1/\gamma^2 = 1 - (1/3)^2 = 8/9.$

$1/\gamma = 0.943$

$\gamma = 1.061$

Se lleva la máquina a dar unas vueltas de reconocimiento, para confirmar que funciona bien. Durante todas las pruebas los sensores a bordo del tren (todavía no nos arriesgamos a llevar tripulación humana) confirman que la longitud se mantiene inalterada.
En tierra preparamos una vía para recibir al tren y montamos equipos electrónicos en dos estaciones:

→Estación-000: ubicada en abscisa x=0m.

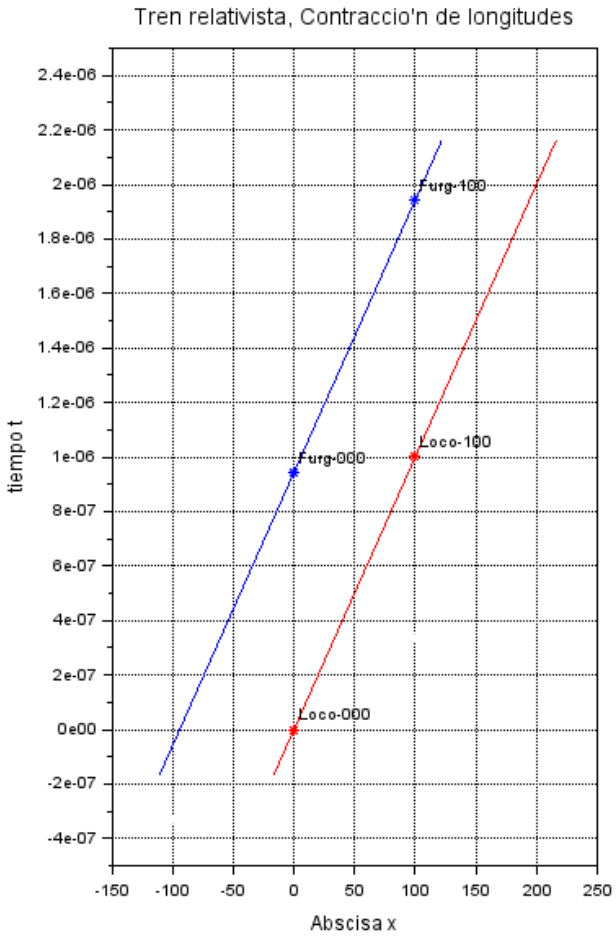
→Estación-100: ubicada en abscisa x=100m.

El tren viaja a lo largo del eje-x y pasa por nuestras estaciones de registro.

Los eventos significativos son los siguientes:

"Loco-000": La estación-000 registra el paso de la locomotora,	t=0ns	x=0m.
"Furg-000": La estación-000 registra el paso del furgón,	t=943ns	x=0m
"Loco-100": La estación-100 registra el paso de la locomotora,	t=1000ns	x=100m.
"Furg-100": La estación-100 registra el paso del furgón,	t=1943ns	x=100m

Ejercicio: Comprobar los números mediante una transformación de Lorentz, y tratar de graficar todo en un diagrama espacio-tiempo.



El primer y el tercer evento no producen ninguna confusión: se confirma que el tren viaja a la velocidad planificada de100 metros por microsegundo, un tercio de la velocidad de la luz. Esto vale para la locomotora, para el furgón y por extensión a todos los vagones intermedios.
Lo que cuesta entender es el segundo evento “Furg-000”: los escépticos que no creen en la Relatividad Especial habrían esperado que ese evento ocurriera en t=1μs en simultáneo con “Loco-100”.
Las medidas revelan que la longitud aparente del tren es más corta medida desde la tierra.
Para cuando la locomotora alcanza la marca x=100m, el furgón está ubicado en x=5.7m.
No disponemos de ningún sensor en esa región pero lo deducimos por interpolación lineal.
La longitud aparente del tren es (100–5.7)m=94.3m

Para tratar de aclarar las dudas y las discusiones entre los científicos y técnicos, recurrimos a los registros de datos tomados por los equipos electrónicos a bordo del tren.

“Loco-000”: La locomotora registra el cruce de la marca-000,	t’=0ns	x’=0m.
“Loco-100”: La locomotora registra el cruce de la marca-100,	t’=943ns	x’=0m.
“Furg-000”: El furgón registra el encuentro con la marca-000,	t’=1000ns	x’=-100m
“Furg-100”: El furgón registra el encuentro con la marca-100,	t’=1943ns	x’=-100m

Ejercicio: Comprobar los números mediante una transformación de Lorentz.

Desde este referencial Σ’ está claro que cada mojón o estación se mueve a velocidad -c/3 = 100 metros por microsegundo hacia atrás.
Lo difícil de entender es el hecho de que las estaciones parecen estar separadas 94.3 metros en vez de 100m.
Y lo más extraordinario: ¡los eventos “Furg-000” y “Loco-100” ocurren en orden opuesto!
En las secciones 4.2 y 4.4.3 veremos más detalles sobre esta inversión del orden temporal.

4.1.1 Densidad de cargas en movimiento:

Este efecto de contracción se vuelve muy pronunciado cuando v_o se acerca a la velocidad de la luz 'c' y $\gamma \to \infty$. En principio podríamos pensar que no hace falta preocuparnos por esos detalles para la escala de nuestra física diaria donde $v_o \ll c$ y $\gamma \approx 1$, sin embargo veremos a continuación que la influencia puede ser decisiva incluso a bajas velocidades.

En un conductor electrónico podemos describir la densidad de corriente a través de un modelo microscópico simplificado:

$J_x = n.q.v_m$

n=densidad volumétrica, medida en portadores/m^3 o portadores por cm^3

q=carga de cada portador

v_m=velocidad media de los portadores de carga, suponemos en la dirección-x

El conductor es eléctricamente neutro. Si los portadores son electrones de carga negativa (q= – e) deben ser compensados por una densidad volumétrica igual de iones con carga positiva (q=+e); estos iones son fijos, solidarios a la estructura del cable. [e=1.602*10^{-19} Coulomb= unidad elemental de carga atómica]

$\rho'_{(+)} = +e.n$ densidad de carga de los iones

$\rho'_{(-)} = -e.n$ densidad de carga de los electrones

Cuando el cable se mueve a velocidad v_o en la dirección de su eje y a favor de su corriente, aplicamos el concepto recién introducido respecto a la contracción de longitudes en el sentido del movimiento: la separación entre iones se ve contraída y los iones se ven más juntos, por lo que su densidad aumenta. La densidad de electrones también se modifica, pero por factor 'γ' diferente.

Desde el referencial Σ se ven:

Iones moviéndose a velocidad v_o, factor $\gamma(+) = 1/\sqrt{1-v_o^2/c^2}$

Electrones moviéndose a velocidad $v_o - v_m$, factor $\gamma(-) = 1/\sqrt{1-(v_o-v_m)^2/c^2}$

La densidad total de carga es $\rho=\rho_{(+)}+\rho_{(-)} = e.n.\gamma(+) - e.n.\gamma(-)$

En el límite de las bajas velocidades, donde se cumple $v_m \ll c$, $v_o \ll c$, los factores gamma se pueden simplificar conservando solo el primer término del desarrollo de Taylor del binomio $(1-\delta)^{-1/2} \approx 1+\delta/2$.

$\rho \approx e.n.[\ 1+ \tfrac{1}{2} .v_o^2/c^2 - (1+ \tfrac{1}{2} .(v_o^2 - 2.v_o.v_m + v_m^2)/c^2\ )\ ]$

$\rho \approx e.n.[\ v_o.v_m - \tfrac{1}{2} v_m^2\ ] /c^2$

Argumentos microscópicos permiten confirmar que v_m es en general chica del orden de ~cm/s, ~mm/s o menor. Ejercicio: Demostrarlo y verificar el resultado en https://en.wikipedia.org/wiki/Drift_velocity

La velocidad v_m se puede entonces despreciar frente a las demás velocidades macroscópicas involucradas en los experimentos habituales de interés práctico. Nos queda:

$\rho \approx e.n.[\ v_o.v_m\ ] /c^2$ Identificamos $J'_x = e.n.v_m$= corriente en Σ'

$$\rho \approx v_o/c^2.J'_x$$

Nos reencontramos con el resultado del capítulo anterior 3.2.3 y 3.2.4 donde las corrientes móviles eran vistas como presentando una densidad de carga no nula; lo que en aquel momento podía parecer "*misterioso*" ahora lo re-interpretamos a la luz del fenómeno de contracción de longitudes.

Ejercicio: La trayectoria de una partícula se llama "línea de Universo" (en inglés "*world-line"*). Proponemos dibujar en un diagrama x-ct las líneas de Universo de las cargas (+) y de las cargas (-) de un conductor quieto y de un conductor móvil, y observar en cada caso cómo cambian las densidades en función de la diferencia de simultaneidad mencionada al inicio del capítulo: las líneas t=cte cortan a un número diferente de trayectorias que las líneas t'=cte. ***Un conductor eléctricamente neutro en un referencial no es neutro visto desde otro referencial en movimiento relativo*.**
El espacio y el tiempo se unen simétricamente en esta Teoría de la Relatividad. El desbalance de cargas en un conductor móvil está asociado a argumentos espaciales (contracción de longitudes) y a argumentos temporales (relatividad de la simultaneidad).

Reflexión:
En el transcurso de este trabajo estamos observando que la mayoría de las magnitudes varían al cambiar entre sistemas Σ y Σ'. Cabría entonces preguntarse si es acertado suponer una invarianza de la carga eléctrica (q=q') o si deberíamos contemplar la posibilidad de que sea q≠q'.
Los modelos físicos que desarrollamos hasta este momento son compatibles con esta invarianza.
El tamaño de un ion o un objeto cargado varía según se mida en Σ o en Σ'. La separación entre portadores también, y eso repercute en una diferencia entre las densidades de carga ρ≠ρ'. Pero la carga total encerrada en un cierto volumen la estamos tratando como una constante en la que concuerdan ambos sistemas. Si surgiera evidencia experimental en sentido contrario, deberíamos corregir los modelos.
A partir del capítulo 5 (Mecánica Relativista) y el capítulo 6 (Relatividad General) haremos una reflexión similar para la masa de las partículas: qué propiedades relacionadas con la masa cambian y qué propiedades se conservan durante un cambio de referencia.

4.2 Relatividad del tiempo.

El reloj de luz de la sección 3.3.3 presentaba dos períodos diferentes, según si se medía desde Σ o Σ'. Veremos ahora la incorporación de aquel fenómeno a las fórmulas de la Transformación de Lorentz.

4.2.1 Dilatación temporal:

Llamamos evento o suceso a un punto del espaciotiempo de 4 dimensiones dado por los valores (ct,x,y,z). Las coordenadas describen o etiquetan el tiempo y el lugar en que ocurre el evento, y lo distinguen de otros eventos que ocurren en diferente lugar y/o instante.
En el tren del ejemplo anterior consideramos dos eventos y sus fórmulas de transformación de coordenadas:

$t_1 = \gamma.(t'_1 + v_o/c^2.x'_1)$ $\qquad$ $t_2 = \gamma.(t'_2 + v_o/c^2.x'_2)$

Imponemos $x'_1=x'_2$, indicando que queremos analizar el caso particular de dos eventos que se perciben en Σ' como que ocurren en el mismo sitio: o bien en la locomotora, en el furgón o en algún otro lugar elegido.

- $t'_2 - t'_1$ es el "tiempo propio" o tiempo transcurrido en un cierto punto, medido en un referencial solidario al punto (en el cual el punto se ve quieto).
- $t_2 - t_1$ es la versión Σ de esta medida de tiempo.

La relación matemática es $t_2 - t_1 = (t'_2 - t'_1).\gamma$
Los tiempos asociados a objetos móviles se ven dilatados por un factor 'γ' respecto a los tiempos propios.
Visto desde Σ'(a bordo del tren), a la locomotora le lleva t'=943ns pasar de una estación a otra.
Visto desde Σ (referencial de la tierra), transcurren t=1000ns entre ambos eventos Loco-000 y Loco-100.

Advertencia: La fórmula tiene sentido si los dos eventos involucrados ocurren en el mismo sitio del referencial Σ'. En el caso del reloj de luz de 3.3.3, ambos eventos (partida y llegada de la luz) ocurrían en la placa inferior. No habría sido válido intentar aplicar la idea de la dilatación temporal a cualquier pareja de eventos del referencial Σ'.

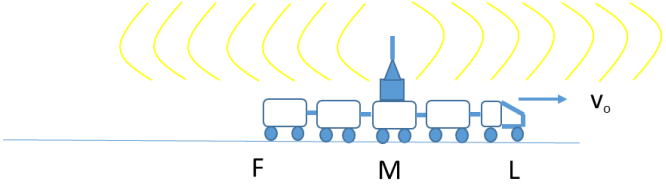
A bajas velocidades $v_o \ll c$, $\gamma \approx 1$, el efecto de dilatación temporal no es significativo a escala humana (¡y muchas veces ni siquiera es detectable con la precisión de nuestros instrumentos actuales!).
Si en vez de un tren tenemos una nave espacial viajando a velocidades cercanas a la de la luz, esta teoría está sugiriendo que puede haber diferencias considerables en los tiempos. Puede darse el caso de astronautas que viajan durante 5 años según sus relojes, pero al volver a la Tierra se encuentran con que allí pasaron 10 años.

Evidencia experimental: La Humanidad todavía debe recorrer un largo camino tecnológico y social antes de emprender viajes espaciales a velocidades relativistas. Pero ya hace décadas que este efecto de dilatación relativista del tiempo fue confirmado experimentalmente en la Física de Partículas, por ejemplo en los aceleradores de partículas o en el estudio de los muones.
A grandes rasgos, la situación es la siguiente: los muones son partículas subatómicas que se generan en las altas capas de la atmósfera terrestre donde impactan los rayos cósmicos provenientes del espacio. Su vida media es de aproximadamente 2.2us, lo que significa que incluso viajando casi a la velocidad de la luz (~297 metros por microsegundo), la Física Clásica predice que tendrían probabilidad $1/e=e^{-1}$~37% de recorrer 660m. Al atravesar 6600m de atmósfera, se esperaría que solo debería sobrevivir una fracción e^{-10}~$4*10^{-6}$ de los muones generados. Sin embargo, la cantidad de muones medidos excede muchísimo a esa predicción clásica. Los resultados son consistentes con una vida media de 2.2us *en su referencial móvil*. Al ser muy alta su velocidad (casi v~0.99c), su factor de dilatación temporal es γ~7 y eso les permite llegar muy cerca de la superficie terrestre antes de desintegrarse.
Invitamos a consultar las fuentes:

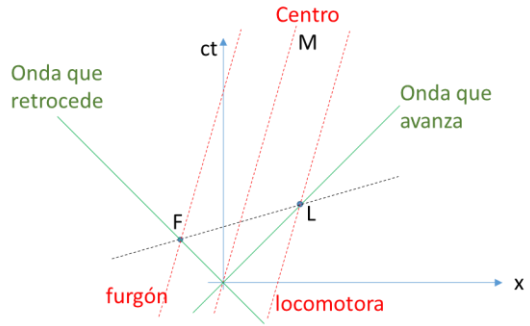
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Relativ/muon.html
https://en.wikipedia.org/wiki/Experimental_testing_of_time_dilation

4.2.2 Simultaneidad relativa:

Analizamos ahora el siguiente experimento: desde un punto 'M' situado exactamente a la mitad de un tren móvil, se emite en el instante t=0 un pulso luminoso o electromagnético en todas las direcciones.



Visto desde el sistema de referencia Σ' que viaja solidario al tren, es de esperar que el pulso llegue en simultáneo a los extremos equidistantes: L=locomotora, F=furgón.
Sin embargo, desde el referencial de la estación Σ los eventos no son simultáneos.
Debido al movimiento del tren, el furgón se acerca al frente de ondas mientras la locomotora se aleja del frente de ondas → desde este punto de vista de la estación el evento de arribo 'F' ocurre antes que el 'L', como podemos ver en el siguiente diagrama espacio-tiempo.



Las trayectorias de los vagones del tren son:

- furgón: $x=v_o.t - H/2$
- vagón central M: $x=v_o.t$
- locomotora: $x=v_o.t + H/2$

Las trayectorias de los frentes de onda son:

- frente que avanza: $x= +c.t$ ángulo +45º
- frente que retrocede: $x= -c.t$ ángulo -45º

Ejercicio: Demostrar que la inclinación de la recta FL es tal que se cumple $\Delta t/\Delta x= v_o/c^2$.
Esta es la inclinación de las líneas de simultaneidad t'=cte, que forman con el eje 'x' el mismo ángulo θ en los diagramas espacio-tiempo ($tg\theta=v_o/c$).

Reflexión: Si no hubiéramos deducido las fórmulas de Lorentz en el capítulo 3, nos alcanzaría con la hipótesis de la constancia de la velocidad de la luz para llegar a la conclusión de que las transformaciones de coordenadas deben tener la forma $t'=K.(t - v_o/c^2.x)$. Solo faltaría ajustar el factor K para lograr simetría en la transformación inversa, y llegaríamos a $K=\gamma$.

4.3 Revisión de cuadrivectores.

Al presentar la Transformación de Lorentz en 3.4 afirmamos que debía aplicar a TODOS los cuadrivectores analizados hasta el momento. Esto significa que si un objeto de 4 componentes no se transforma mediante el producto matricial por el jacobiano de Lorentz →no es un buen cuadrivector relativista; o al menos no está todavía en la forma correcta en que debería estar para poder enunciar leyes físicas invariantes.
Veremos 3 ejemplos de esta situación: velocidades $\vec{u}$, campos electromagnéticos $\vec{E}$, $\vec{B}$ y fuerzas $\vec{f}$.

4.3.1 Adición relativista de velocidades:

La fórmula clásica de Galileo $u_x=v_o+u'_x$ es útil a nivel intuitivo porque se interpreta como:
Velocidad total = velocidad de arrastre + velocidad relativa.
En el marco de la Teoría Especial de la Relatividad esta fórmula clásica solo es válida en forma aproximada a bajas velocidades. A continuación deducimos la generalización a velocidades arbitrarias.
Consideramos una partícula que describe una trayectoria rectilínea uniforme en Σ':

$x'=u'_x.t'$ $\quad y'=u'_y.t'$ $\quad z'=u'_z.t'$

Aplicamos Lorentz: $x=\gamma.(x'+v_o.t')$ $\quad t= \gamma.(t' +v_o/c^2.x')$
Dividimos $x/t = (x'+v_o.t')/(t' +v_o/c^2.x')$
Sustituimos $x'=u'_x.t'$ → $x/t = u_x= (v_o+u'_x)/(1 + u'_x.v_o/c^2)$
A bajas velocidades, $u_x' \ll c$, $v_o \ll c$ → $u_x \approx v_o + u'_x$

Repetimos para las componentes transversales u_y, u_z.

$u_y=y/t$ →sustituimos por Lorentz $y=y'$, $t= \gamma(t' +v_o/c^2.x')$
$u_y = y'/\gamma/(t' +v_o/c^2.x')$ →sustituimos x', y'
$u_y = u'_y t'/\gamma/(t' +v_o/c^2.u'_x t')$ →cancelamos factor t'
→ $u_y= (u'_y/\gamma)/(1 + u'_x.v_o/c^2)$

$u_z=z/t$ →sustituimos $z=z'$, $t= \gamma(t' +v_o/c^2.x')$
$u_z = z'/\gamma/(t' +v_o/c^2.x')$ →hacemos aparecer las velocidades relativas
$u_z = u'_z t'/\gamma/(t' +v_o/c^2.u'_x t')$ →cancelamos factor t'
→ $u_z= (u'_z/\gamma)/(1 + u'_x.v_o/c^2)$

En resumen: Estas fórmulas son relativísticamente correctas, pero desde el punto de vista cuadridimensional el vector $U4=(c,u_x,u_y,u_z)$ no experimenta una transformación igual a la de Lorentz al convertirse en $U4'$.
Se observan al menos 3 diferencias respecto al comportamiento esperado $[U4]=[\mathrm{Jac}].[U'4]$:

- La componente temporal se mantiene invariante, vale 'c' en ambos sistemas Σ y Σ'.
- Aparecen factores diferentes al γ.
- Se alteran las componentes transversales al movimiento.

Ejercicio: Calcular las normas $<U4,U4>$ y $<U'4,U'4>$, y tratar de deducir qué factor de escala podría estar faltándole a la cuadrivelocidad para que su norma sea invariante. En el capítulo 5 veremos la solución.
Ejercicio: Confirmar que los resultados "*misteriosos*" de los fluidos de Fizeau, descritos en 2.3.5, se aclaran con estas fórmulas. Es decir, para $u'_x=c/n$ →$u_x \approx c/n +v_o.(1-1/n^2)$ en el límite $v_o \ll c$.

4.3.2 Campos electromagnéticos:

Expresamos los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en función de los potenciales $\vec{A}$, Φ: $-\vec{E} = \nabla\Phi + \partial_t\vec{A}$ $\quad \vec{B} =\nabla\wedge\vec{A}$
Luego convertimos los operadores de derivada y los potenciales según las fórmulas de Lorentz, tratando por separado las direcciones paralelas (||) y transversales (⊥) al movimiento.

Campo eléctrico longitudinal:

$-E_x = \partial_x\Phi + \partial_t A_x$ →convertimos los potenciales
$-E_x = \gamma\partial_x(\Phi' + v_o.A'_x) + \gamma\partial_t(A'_x + v_o/c^2.\Phi')$ →agrupamos

$-E_x = \gamma.(\partial_x + v_o/c^2\partial_t)\Phi' + \gamma.(\partial_t + v_o.\partial_x)A'_x$

$-E_x = \gamma.(\partial_x + v_o/c^2\partial_t)\Phi' + \gamma.(\partial_t + v_o.\partial_x)A'_x$ →reconocemos las derivadas en Σ'

$-E_x = \partial'_x\Phi' + \partial'_tA'_x$

$-E_x = -E'_x$ →$E_x = E'_x$

Campo eléctrico transversal:

$-E_y = \partial_y\Phi + \partial_tA_y$ →convertimos los potenciales

$-E_y = \gamma\partial_y(\Phi' + v_o.A'_x) + \partial_t(A'_y)$

$-E_y = \gamma\partial_y(\Phi' + v_o.A'_x) + \partial_t(A'_y)$ →convertimos las derivadas **(¡atención al signo!)**

$-E_y = \gamma\partial'_y(\Phi' + v_o.A'_x) + \gamma.(\partial'_t - v_o.\partial'_x)(A'_y)$ →agrupamos

$-E_y = \gamma(\partial'_y\Phi' + \partial'_tA'_y) + \gamma.v_o.(\partial'_yA'_x - \partial'_xA'_y)$

$-E_y = \gamma(\partial'_y\Phi' + \partial'_tA'_y) + \gamma.v_o.(\partial'_yA'_x - \partial'_xA'_y)$ →reconocemos campos en Σ'

$-E_y = \gamma(-E'_y) + \gamma.v_o.(-B'_z)$

→$E_y = \gamma(E'_y + v_o.B'_z)$

Ejercicio: Repetir los pasos anteriores para demostrar→$E_z = \gamma(E'_z - v_o.B'_y)$

Las transformaciones recién calculadas se pueden resumir como:

$E_{\parallel} = E'_{\parallel}$ $\quad \vec{E}_{\perp} = \gamma.(\vec{E}'_{\perp} - v_o\vec{\wedge}\vec{B}')$

Campo magnético longitudinal:

$B_x = \partial_yA_z - \partial_zA_y$ →convertimos los potenciales

$B_x = \partial_yA'_z - \partial_zA'_y$

$B_x = \partial_yA'_z - \partial_zA'_y$ →convertimos las derivadas

$B_x = \partial'_yA'_z - \partial'_zA'_y$ →reconocemos las componentes de campos en Σ'

$B_x = B'_x$

Campo magnético transversal:

$B_y = \partial_zA_x - \partial_xA_z$ →convertimos los potenciales

$B_y = \gamma.\partial_z(A'_x + v_o/c^2.\Phi') - \partial_xA'_z$

$B_y = \gamma.\partial_z(A'_x + v_o/c^2.\Phi') - \partial_xA'_z$ →convertimos las derivadas

$B_y = \gamma.\partial'_z(A'_x + v_o/c^2.\Phi') - \gamma.(\partial'_x - v_o/c^2.\partial'_t)A'_z$ →agrupamos y reconocemos componentes de campo

$B_y = \gamma.(\partial'_zA'_x - \partial'_xA'_z) + \gamma.v_o/c^2.(\partial'_z\Phi' + \partial'_tA'_z)$

$B_y = \gamma.(B'_y) + \gamma.v_o/c^2.(-E'_z)$

→$B_y = \gamma.(B'_y - v_o/c^2.E'_z)$

Ejercicio: Repetir los pasos anteriores para demostrar →$B_z = \gamma(B'_z + v_o/c^2.E'_y)$

Las transformaciones recién calculadas se pueden resumir como:

$E_{\parallel} = E'_{\parallel}$ $\quad \vec{E}_{\perp} = \gamma.(\vec{E}'_{\perp} - v_o\vec{\wedge}\vec{B}')$ $\quad$ Inversa: $\vec{E}'_{\perp} = \gamma.(\vec{E}_{\perp} + v_o\vec{\wedge}\vec{B})$

$B_{\parallel} = B'_{\parallel}$ $\quad \vec{B}_{\perp} = \gamma.(\vec{B}'_{\perp} + 1/c^2.v_o\vec{\wedge}\vec{E}')$ $\quad$ Inversa: $\vec{B}'_{\perp} = \gamma.(\vec{B}_{\perp} - 1/c^2.v_o\vec{\wedge}\vec{E})$

En 2.1.4 y 3.2.2 habíamos visto fórmulas clásicas aproximadas que solo valían en escenarios de baja velocidad. Estas nuevas fórmulas son relativistas, más exactas; pero están sugiriendo un comportamiento en cierta manera opuesto a otros cuadrivectores: se mantiene intacta la componente longitudinal al movimiento y las que cambian son las transversales. No debemos alarmarnos. Esto simplemente significa que no podemos encontrar escalares e0, b0 que completen cuadrivectores *E4*=(e0,$\vec{E}$) y *B4*=(b0,$\vec{B}$). Tampoco es necesario visualizar en 6D las fórmulas recurriendo a hexavectores *EB6*=(E_x,E_y,E_z,B_x,B_y,B_z). La descripción relativista de los campos $\vec{E}$,$\vec{B}$ se logra incorporando sus componentes dentro de una matriz 4x4, como veremos en el capítulo 5.6.

4.3.3 Transformación de fuerzas:

Suponemos una carga eléctrica 'q' que se mueve actualmente con velocidad $\vec{u}$.
Podemos elegir nuestros ejes coordenados en forma arbitraria para hacer coincidir el eje $\hat{x}$ con la velocidad, y llamamos v_o al módulo de la velocidad $v_o = |\vec{u}|$.

Esto nos permite analizar el problema desde 2 referenciales:

- Σ = laboratorio, allí se ve una carga móvil con velocidad $\vec{u} = v_o\,\hat{x}$.
- Σ' = solidario a la carga, se la ve quieta inicialmente en t'=0.
  (puede comenzar a adquirir una pequeña velocidad al transcurrir el tiempo).

En Σ la fuerza de Lorentz tiene componentes tanto eléctricos como magnéticos: $\vec{f} = q.(\vec{E} + \vec{v_o} \wedge \vec{B})$
$f_x = q.E_x \qquad f_y = q.(E_y - v_o.B_z) \qquad f_z = q.(E_z + v_o.B_y)$

En Σ' la carga está en reposo y solo experimenta fuerza eléctrica: $\vec{f}' = q.\vec{E}'$
$f'_x = q.E'_x \qquad f'_y = q.E'_y \qquad f'_z = q.E'_z$

Acabamos de calcular la transformación relativista de campos en 4.3.2. $E_x = E'_x$ conduce a $f'_x = f_x$
Si invertimos los roles de Σ y Σ', cambiando el signo de la velocidad, tenemos: $E'_y = \gamma(E_y - v_o.B_z)$.
Lo que significa $\rightarrow f'_y = \gamma.f_y$

Repetimos los cálculos para la componente-z:
$f_z = q.(E_z + v_o.B_y)$
$f'_z = q.(E'_z)$
$E'_z = \gamma(E_z + v_o.B_y) \qquad \rightarrow f'_z = \gamma.f_z$

En el camino que venimos recorriendo tuvimos que abandonar la igualdad galileana de fuerzas y comenzamos a aceptar que pueda haber diferencias $\vec{f} \neq \vec{f}'$.
El problema es que aquí observamos una variación en las componentes transversales al movimiento, lo que implica que las componentes de la fuerza $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ en su forma actual no pueden formar parte de una buena cuadrifuerza relativista porque la regla de transformación no corresponde al producto matricial con el jacobiano de Lorentz. De igual manera, la cuadrivelocidad no puede formarse exactamente ubicando en su parte espacial las componentes $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$.

Ofrecemos aquí un anticipo artesanal sobre los ajustes necesarios para construir una cuadrifuerza relativista.
En este referencial Σ' acompañamos brevemente a la partícula mientras experimenta un pequeño cambio de trayectoria por acción de las fuerzas: $u'_x(t') \approx a'_x.t'$, $u'_y(t') \approx a'_y.t'$, $u'_z(t') \approx a'_z.t'$
Suponemos que todas las fuerzas (electromagnéticas o de cualquier otro origen) se transforman igual que las fuerzas de Lorentz, y concentramos la atención en alguna de las direcciones transversales.

$f_y = f'_y/\gamma$ →aplicamos Física Clásica en Σ', donde la partícula está "casi" en reposo
$f_y = 1/\gamma.m.du_y'/dt'$

La transformación de coordenadas entre Σ y Σ' da $t = \gamma.(t' + v_o/c^2.x')$
Durante el breve tiempo que dura este análisis, $x' \approx \frac{1}{2}.a'_x.t'^2$ es infinitésimo de mayor orden, por lo tanto $t \approx \gamma.t'$ y $d/dt' \approx \gamma.\, d/dt$. Sustituimos la derivada temporal en la ecuación de la fuerza-y.

$f_y = 1/\gamma.m.du_y'/dt' \qquad \rightarrow f_y = m.du_y'/dt$

Ahora utilizamos la transformación de velocidades deducida en 4.3.1 $u_y = (u'_y/\gamma)/(1 + u'_x.v_o/c^2)$.
En el intervalo de estudio u'_x es insignificante y el denominador vale aproximadamente '1'. Por lo tanto:

$u_y \approx u'_y/\gamma$
$u'_y \approx \gamma.u_y$

Sustituimos en la ecuación de fuerza-y y llegamos a→ $f_y = d(m.\gamma.u_y)/dt$
Un razonamiento similar para la fuerza-z conduce a→ $f_z = d(m.\gamma.u_z)/dt$
Cuando estudiemos más en detalle la Mecánica Relativista, en el capítulo 5, veremos que estos factores 'γ' aparecen en la generalización de las ecuaciones de masa, fuerza y cantidad de movimiento relativista.
Los anotaremos γ_u para distinguirlos de los γ de cambio de referencia entre Σ y Σ'.
Estos factores γ_u y γ'_u son propios a cada partícula o carga móvil según su estado instantáneo de movimiento. Estamos repitiendo el recurso que hacíamos en 4.1.1 distinguiendo el γ(+) de los iones y el γ(-) de los electrones que se mueven a distintas velocidades dentro de un metal conductor.

- γ_u = factor de Lorentz que surge de aplicar en Σ una transformación con velocidad $\vec{u}$ para quedar solidarios a la carga
- γ'_u = factor de Lorentz que surge de aplicar en Σ' una transformación con velocidad $\vec{u'}$

En este ejemplo que estamos analizando con la carga 'q' → $\gamma_u=\gamma$, $\gamma'_u=1$.
La ecuación $f'_y = \gamma\, f_y$ se convierte en $\gamma'_u.f'_y = \gamma_u.f_y$
La versión corregida de la cuadrifuerza resulta

$$F4 = \gamma_u.(\dot{W}/c, \vec{f}) \qquad F'4 = \gamma'_u.(\dot{W}'/c, \vec{f'})$$

Con esta redefinición se cumple F'y=Fy, F'z=Fz.
Anotamos con mayúscula las fuerzas relativistas para diferenciarlas de las clásicas con minúscula.
Como ocurre con los demás cuadrivectores, el movimiento relativo deja inalteradas las componentes transversales Fy, Fz.

En este ejemplo $\gamma'_u=1$ porque elegimos a propósito un referencial Σ' que acompañe a la partícula.
Los razonamientos podrían extenderse a cualquier cambio de referencia Σ, Σ' y a una partícula que tenga velocidades arbitrarias $\vec{u}$, $\vec{u'}$ en cada sistema de referencia.

4.4 Constancia de la velocidad de la luz.

Las ecuaciones de Maxwell encierran de alguna manera este concepto de invarianza o constancia de la velocidad de la luz. El valor depende del medio físico de acuerdo con la fórmula $v_c=1/\sqrt{\mu.\epsilon}$. En el vacío tenemos $c=1/\sqrt{\mu_o.\epsilon_o}$, no debería influir el movimiento relativo entre el emisor de luz y el observador porque ***al haber ausencia de materia no nos estaríamos moviendo con respecto a nada***.

De acuerdo con lo expuesto en la sección 2.3.3, los modelos físicos pre-relativistas trataban diferente este detalle: requerían la presencia de una sustancia "etérea" que llenara todo el espacio y esperaban que las mediciones experimentales revelaran una velocidad de propagación diferente para observadores con movimiento relativo. La evidencia experimental apuntó en el sentido de confirmar la invarianza de la velocidad de la luz, y veremos enseguida que es plenamente compatible con la transformación de Lorentz.

4.4.1 Rayo de luz lineal:

El concepto de "rayo de luz" puede interpretarse de dos maneras:

- la trayectoria de un punto particular de un frente de ondas localmente plano donde la energía es máxima.
- la trayectoria de un "*fotón*", es decir, una partícula o corpúsculo luminoso.

Ambas interpretaciones tienen en común que se trata de un fenómeno que se propaga en forma rectilínea a velocidad 'c'. Por simplicidad comenzamos estudiando propagación solo en dirección 'x' y aplicamos las fórmulas recién deducidas para conversión de velocidades.

Enunciado: Si un fenómeno en Σ' es descrito mediante una velocidad $u'_x=c$, su resultante en Σ también será $u_x=c$. Lo mismo para velocidades –c, en sentido opuesto.

Demostración:

Para $u'_x=c$, la fórmula de adición 4.3.1 queda

$u_x= (v_o+u'_x)/(1 + u'_x.v_o./c^2)$

$u_x= (v_o+c)/(1 + c.v_o/c^2)$

$u_x= (v_o+c)/(1 + v_o/c)$

$u_x= (v_o+c).c/(c + v_o) \rightarrow u_x= c$

Para $u'_x= – c$,

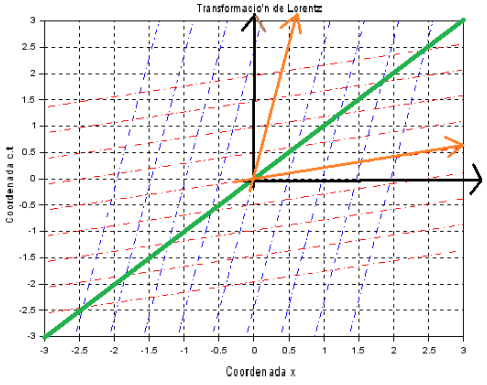
$u_x= (v_o-c)/(1 – c.v_o/c^2)$

$u_x= (v_o-c)/(1 – v_o/c)$

$u_x= (v_o-c).c/(c – v_o) \rightarrow u_x= –c$

Representación gráfica:

En los diagramas de espaciotiempo, la recta a 45° **x=ct** *también es bisectriz de los ejes del referencial Σ'* → es decir, también cumple **x'=c.t'**. Repetimos la figura de 4.1, resaltando los ejes y su bisectriz:

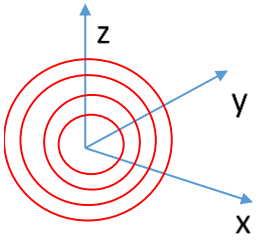


Ejercicio: Un fotón viaja en Σ con $u_x=0$, $u_y=c$, $u_z=0$. Pasar a Σ' y demostrar que $u'_x{}^2+u'_y{}^2+u'_z{}^2=c^2$. Calcular el ángulo de la trayectoria y comparar con el ejemplo pre-relativista de la sección 3.3.2

4.4.2 Frente de ondas esféricas:

Analizamos ahora otro escenario:

En el instante t=0 t'=0 se emite desde el origen de coordenadas un pulso luminoso o electromagnético.



El frente de ondas que se aleja del origen se propaga según las siguientes trayectorias:

En Σ) $x^2+y^2+z^2 = c^2t^2$ En Σ') $x'^2+y'^2+z'^2 = c^2t'^2$

Luego de transcurrido un tiempo 't', el lugar geométrico de los puntos(x,y,z) de máxima energía satisface la ecuación de una cáscara esférica de centro (x,y,z)=(0,0,0) y radio R=c.t.

Si la velocidad de la luz es invariante para trayectos lineales también debería serlo para cada una de las posibles direcciones que parten del origen. Es decir que en Σ', a pesar de estar en movimiento v_o respecto de Σ, el frente de ondas también tendría que expandirse como cáscaras esféricas de centro (x',y',z')=(0,0,0) y radio R'=c.t' (con el t' correspondiente a ese referencial).

Esto debería ser demostrable mediante las fórmulas de Lorentz, y lo haremos:

$x^2+y^2+z^2 = \gamma^2(x'+v_o.t')^2 + y'^2 + z'^2 = \gamma^2(x'^2+2v_o.t'.x' + v_o{}^2t'^2) + y'^2 + z'^2$

$c^2t^2 = \gamma^2c^2(t'+v_o/c^2.x')^2 = \gamma^2c^2(t'^2+2v_o/c^2.t'.x' + v_o{}^2/c^4.x'^2)$

Restamos y agrupamos, se cancelan los dobles productos x'.t':

$x^2+y^2+z^2 - c^2t^2 = \gamma^2x'^2(1-v_o^2/c^2) + \gamma^2t'^2(v_o^2-c^2) + y'^2 + z'^2$

$x^2+y^2+z^2 - c^2t^2 = \gamma^2(1-v_o^2/c^2).(x'^2-c^2t'^2) + y'^2 + z'^2$

Reconocemos que $\gamma^2(1-v_o^2/c^2)=1$ por definición.

$x^2+y^2+z^2 - c^2t^2 = 1.(x'^2-c^2t'^2) + y'^2 + z'^2$

$x^2+y^2+z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$

El pulso electromagnético que se propaga en forma de cáscaras esféricas anula la parte izquierda y la parte derecha de la ecuación. Pero los pasos de esta demostración nos revelan algo más profundo y general.

Acabamos de encontrar un invariante,

expresado a la izquierda en el sistema Σ y a la derecha en el referencial Σ'.

$(S)^2 = (S')^2$

Se puede escribir esto mismo en forma diferencial $(dS)^2 = (dS')^2$, repitiendo todos los cálculos anteriores con (c.dt,dx,dy,dz) en lugar de (c.t,x,y,z).

El invariante que definimos como $(dS)^2 = (dx)^2+(dy)^2+(dz)^2 - c^2(dt)^2$ es una especie de norma o métrica, con la particularidad de que la componente temporal aparece con signo negado en la suma de cuadrados.

Los trayectos luminosos son un caso particular de métrica nula en los que $(dS)^2 = (dS')^2 = 0$.

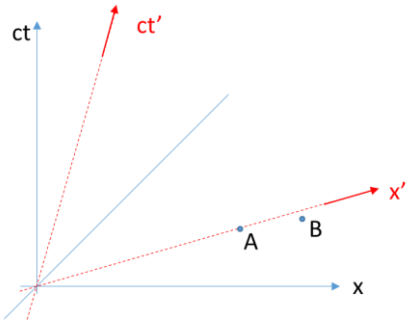
En general, para dos puntos próximos en el espacio-tiempo 4-dimensional, habrá casos en que se cumple $(dS)^2>0$ y casos en los que $(dS)^2<0$. Cuando los puntos tienen la misma coordenada temporal, por ejemplo los extremos de un tren $x_L(t)$ y $x_F(t)$, esta métrica efectivamente describe la distancia euclídea en 3 dimensiones tal como la conocemos.

Anticipo: En el capítulo 5 "Mecánica Relativista" veremos una utilidad de esta métrica: *las trayectorias que describen las partículas materiales son las que minimizan esta métrica cuadri-dimensional*. Este concepto cobrará incluso más importancia en Relatividad General, cuando estudiemos las trayectorias de partículas en presencia de una métrica perturbada por campos gravitatorios.

4.4.3 ¿Velocidad límite ‘c’?:

El factor ‘γ’ de Lorentz diverge en $v_o=c$ (denominador nulo) y se vuelve complejo si intentamos aplicarlo a velocidades $v_o>c$. Esto deja sembrada la duda: ¿puede haber objetos moviéndose con $v_o>c$ que motiven nuestra necesidad de ubicarnos en un referencial solidario a ellos, para “*ver el mundo con sus ojos*”?
Desde el punto de vista matemático la velocidad de la luz ‘c’ parece ser un valor límite.
Recordemos los cálculos de la sección 3.4.2: si una carga eléctrica sobrepasara la velocidad de la luz, su potencial Φ valdría complejo imaginario en la región $(x-v_ot)^2<(v_o^2/c^2-1)(y^2+z^2)$. Un estudio próximo de Mecánica Relativista nos dará argumentos para entender cómo la Física parece protegerse a sí misma frente a valores infinitos o complejos, oponiéndose a que los objetos materiales se acerquen al límite ‘c’.

Podemos ver que el límite no aplica únicamente a las partículas sino también a las señales de información.

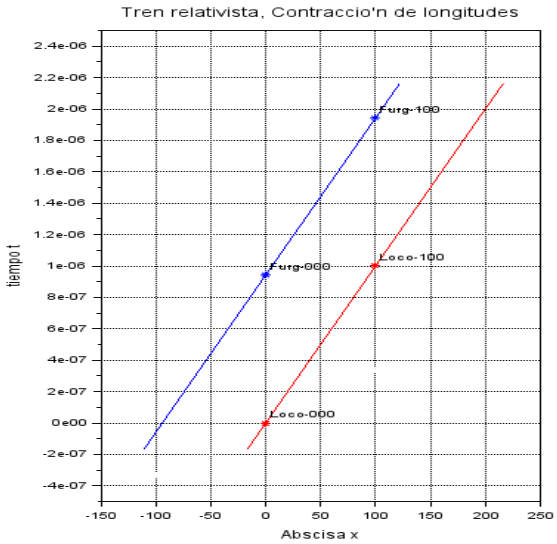


En la gráfica se observan dos eventos ‘A’, ‘B’.

- Según la referencia Σ, ‘A’ ocurre antes que ‘B’ porque $t_A<t_B$.
  Las líneas de simultaneidad t=cte son horizontales en el dibujo, y se ve que ‘A’ está “*más abajo*”
- Según la referencia Σ’, ‘A’ ocurre luego de ‘B’ porque $t'_A>t'_B$
  Las líneas de simultaneidad t’=cte tienen la inclinación del eje x’
  $t'_A=0$ porque ‘A’ está sobre el eje x’, t'_B es negativo porque ‘B’ está debajo del eje x’

Esta inversión del orden temporal solo es posible para eventos relacionados como en la figura, con la recta $\overline{AB}$ inclinada menos de 45° de tal manera que altura/base<1, $c.\Delta t/\Delta x<1$, $\Delta x/\Delta t>c$.
Si existiera algún mecanismo (partículas o señales superlumínicas) para recorrer el trayecto Δx en un tiempo Δt a velocidad mayor que la de la luz $\Delta x/\Delta t>c$, se podría crear una conexión causal entre ‘A’ y ‘B’: sucesos de ‘A’ podrían condicionar a los de ‘B’ a través del envío de mensajes contenidos en partículas o en señales de información. Con la consecuencia de que habría sistemas de referencia como el Σ’ en el cual ***un evento ‘B’ se vería influenciado por sucesos ‘A’ que ocurren en su futuro***.

Volvemos al experimento del tren relativista descrito en la sección 4.1.



Los eventos “Furg-000” y “Loco-100” tienen el orden temporal invertido según el referencial Σ o Σ’.

Furg-000	t=943ns	t’=1000ns
Loco-100	t=1000ns	t’=943ns

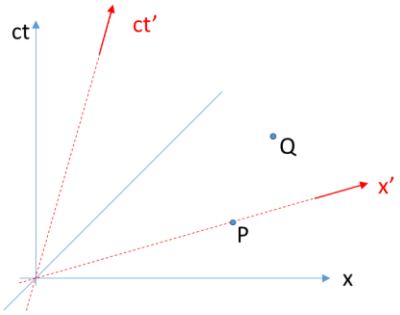
Supongamos que se dispone de una tecnología de “*hiper-láser*” capaz de enviar señales a velocidades hiperlumínicas, y se instala uno de esos dispositivos a bordo del tren.
En t’=943ns, cuando el sensor de la locomotora detecta el pasaje por la estación-100, se enciende el hiperláser y se lo modula con el texto “Locomotora acaba de pasar por Est-100 en t’=943ns”. La señal viaja hacia atrás a lo largo del tren y alcanza el furgón en t’=1000ns, recorriendo 100 metros en 57ns a una super velocidad de ~5.85c.

Ahora la descripción desde el punto de vista de las estaciones de tierra es desconcertante:
En t=943ns, evento “Furg-000”, la estación-000 detecta el pasaje del furgón. También se recibe una señal de hiperláser anunciando que la locomotora acaba de alcanzar la marca-100.
En t=1000ns, evento “Loco-100”, ocurre el evento que antes fue anunciado y en ese momento se enciende el hiperláser (que estaba apagado cuando se recibió el mensaje).

¡Tenemos un mensaje que viaja hacia el pasado!
Se abren las puertas a las paradojas lógicas. Supongamos que la vía y el resto de la infraestructura de transporte disponen de receptores hiperláser; entonces podrían estar programadas de tal manera que, si el mensaje hiperláser avisa que la locomotora llegó (¿o va a llegar??) a la estación-100 en tal o cual tiempo, se aplica una acción potente a los motores o a la vía para modificar la velocidad y actuar en contra de lo que fue pre-anunciado.

Es un tema interesante para ciencia ficción. Pero hasta donde llega nuestro conocimiento actual, estas posibles paradojas de causalidad no parecen estar permitidas en la Teoría de la Relatividad debido al carácter límite de la velocidad ‘c’.

No hay problema de causalidad para parejas de sucesos P,Q separadas de manera que se cumpla ($c.\Delta t > \Delta x$).



La conexión causal puede establecerse mediante el envío de señales de información de P hacia Q con velocidad menor o igual a la de la luz $\Delta x/\Delta t < c$.
El hecho de que ‘P’ ocurra antes que ‘Q’ se mantiene para cualquier sistema de referencia Σ’, es algo en lo que concuerdan todos los observadores; no hay inversión del orden temporal al alternar entre Σ’ y Σ.

4.5 Métrica y notación tensorial.

Recordando capítulos anteriores: La métrica $(dS)^2$ fue el primer invariante que propusimos, en la sección 1.4, junto con el diferencial de línea $d\vec{S}$.
En 3 dimensiones la relación era trivial $(dS)^2=d\vec{S}\cdot d\vec{S}$; pero desde que nos embarcamos en los espacios cuadridimensionales tuvimos que recorrer un camino largo para volver a relacionarlos.
La relación que encontramos ahora no es un producto escalar tridimensional sino uno cuadridimensional expresable como forma cuadrática $dS^2=<d\vec{S},d\vec{S}>$.

4.5.1 Métrica de Minkowski:

Para expresar formalmente esta métrica "*inusual*" con signo cambiado recurrimos al tensor métrico que se visualiza como una matriz 4x4 con (-1,+1,+1,+1) en la diagonal:

[g]=

```
[-1    0      0       0]
[0     +1     0       0]
[0     0      +1      0]
[0     0      0      +1]
```

Esta matriz se asocia a una forma cuadrática que opera sobre vectores de 4 dimensiones:
<A,A>=[A*].[g].[A]
[A] = cuadrivector en forma de vector columna "parado" (vertical)
[A*]= es el mismo cuadrivector traspuesto, queda como un vector fila "acostado" (horizontal)

Primera parte: [A*].[g] = vector acostado a la izquierda multiplicado por la matriz [g] en ese orden

```
                -1     0    0    0
                 0    +1    0    0
                 0     0   +1    0
                 0     0    0   +1
[A0 A1 A2 A3][-A0 +A1 +A2 +A3]
```

El resultado parcial es un vector fila (–A0,A1,A2,A3), con las mismas componentes que el vector columna original salvo un cambio de signo en la componente-0.

Segunda parte: Multiplicar el resultado anterior (vector fila) por el vector columna.
$[A^*].[g].[A] = -A0^2 + A1^2 + A2^2 + A3^2$
Ejercicio: Realizar el doble producto matricial re-agrupando en forma diferente.
Primero [Result]=[g].[A] y luego <A,A> = [A*].[Result].

La invarianza de la métrica implica que <A,A> tiene que dar lo mismo que <A',A'>.
Matricialmente podemos escribir [A]=[Jac].[A'], siendo

- [Jac] = el jacobiano de la transformación de Lorentz
- [A'] = el mismo cuadrivector A pero expresado en sus componentes de Σ' en vez de Σ.

Por las reglas de trasposición de matrices, [A*] = [A'*] . [Jac*]

Queda entonces <A,A> = [A*].[g].[A] = [A'*].[Jac*].[g].[Jac].[A'] = [A'*].[g].[A'] = <A',A'>
Ejercicio: Demostrar la igualdad matricial [Jac*].[g].[Jac] = [g]
El tensor métrico [g], multiplicado a la derecha por el jacobiano de Lorentz y a la izquierda por el jacobiano traspuesto, vuelve a dar el mismo tensor métrico [g]. Se dice que la transformación de Lorentz conserva la métrica, pero no la de Euclides-Pitágoras sino la nueva métrica 4D de la Relatividad Especial llamada Métrica de Minkowski.

Una de las características más sorprendentes de esta métrica es que admite valores nulos o negativos.

- Métrica positiva o tipo-espacio ("*spacelike*" en inglés)
- Métrica negativa o tipo-tiempo ("*timelike*" en inglés)
- Métrica nula o luminosa (en inglés "*lightlike*")

El criterio para clasificar los tipos de métrica es cuantificar si las componentes espaciales pesan más que la temporal en la suma de cuadrados.

Cuando la métrica aplica a la medición del intervalo espaciotemporal $d\vec{S}$, entre dos eventos vecinos 'A' y 'B', tenemos el siguiente panorama:

- $(dS)^2<0$ puede corresponder a la trayectoria física de una partícula. En tal caso es posible realizar una transformación de Lorentz para movernos solidarios a la partícula→ en ese referencial móvil solo hay desplazamiento temporal y la métrica mide tiempo propio (con ajuste de signo).
- $(dS)^2>0$ no puede corresponder a ninguna trayectoria de partícula física ni de señales, se dice que los eventos están desconectados causalmente; pero es posible realizar una transformación de Lorentz para la cual ambos eventos 'A' y 'B' sean simultáneos, entonces la métrica mide distancias propias. Ejercicio: Demostrar este resultado.
- $(dS)^2=0$ corresponde a trayectos de ondas electromagnéticas o rayos luminosos. Cualquier transformación de Lorentz que realicemos va a mantener esa propiedad $(dS')^2=0$.

4.5.2 Formulación tensorial:

A continuación se toman prestadas ciertas notaciones del Cálculo Tensorial.
En caso de dificultad sugerimos consultar material especializado sobre este tema para adquirir mayor familiaridad con la notación.

→El tensor métrico se escribe como $g_{\alpha\beta}$, donde ambos índices α y β varían entre 0 y 3.
El índice-0 es el índice temporal y los índices 1,2,3 son índices espaciales.
Las 16 componentes del tensor métrico se pueden ubicar como celdas de una matriz 4x4, donde α indica la fila y β la columna.

α\β	0	1	2	3	.
0	[g_{00}	g_{01}	g_{02}	g_{03}	]
1	[g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	]
2	[g_{20}	g_{21}	g_{22}	g_{23}	]
3	[g_{30}	g_{31}	g_{32}	g_{33}	]

→Se trata de un tensor simétrico, lo que significa $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$.
→La métrica de Minkowski es un caso particular y se anota usualmente con la letra griega $\eta_{\alpha\beta}$.
→El tensor métrico es el primero de varios tensores que aparecen en la Teoría de la Relatividad.

→Un cuadrivector contra-variante se describe con superíndices X^{α} con α variando entre 0 y 3.
Es importante tener la precaución de no confundir los superíndices con exponentes. Durante las primeras páginas intentaremos escribir los superíndices (X^{α}) un poco más bajos que los exponentes $(X)^3$, y si es necesario utilizaremos paréntesis para separar las potencias; luego iremos viendo que no hace falta tanta precaución porque el contexto suele ser claro sobre la distinción.
→Un cuadrivector covariante se describe con subíndices X_{α}.

→La versión covariante de un cuadrivector X^{α} se puede obtener "bajando índices", lo cual se logra matemáticamente realizando el producto matricial con el tensor métrico.

$$X_{\alpha} = \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} X^{\beta}$$

→Se utiliza el convenio o convención de suma de Einstein, que permite escribir las fórmulas de manera más abreviada omitiendo el signo de sumatoria → $X_{\alpha} = g_{\alpha\beta} X^{\beta}$
Cuando nos enfrentamos a una expresión que utiliza este convenio, podemos *deducir* cuál es el símbolo de suma que está omitido. Basta encontrar un índice repetido (en este ejemplo β), que aparezca una vez arriba (como superíndice) y otra vez abajo (como subíndice).

La notación $X_{\alpha} = g_{\alpha\beta} X^{\beta}$ admite dos lecturas:

--1. Para cada α variando entre 0 y 3, tenemos una sumatoria (con signo Σ omitido) para calcular X_α.
--2. También puede verse como el vector resultado del producto matricial: [vector]=[matriz].[vector], la cantidad de índices indica en cada caso las dimensiones de la matriz o vector.
→Un ejemplo de utilidad de esta convención de la suma se ve al expresar el diferencial de una función de varias variables. Escribimos $df=\partial f/\partial X^\alpha.dX^\alpha$, pensando en cómo sería el diferencial 'df' si hubiera cambio en una sola de las variables dX^α. La expresión es la misma si hubiera cambio en todas las variables, y en ese caso el convenio de la suma es consistente con el hecho de que los diferenciales parciales son aditivos.
(*La notación $df=\partial_\alpha f.dX^\alpha$ muestra 'α' abajo y ayuda a visualizar que se balancea con el 'α' alto*)
→Un índice repetido no puede ir 2 veces abajo ni 2 veces arriba, es incorrecto $U^\alpha U^\alpha$, o $J_\beta.J_\beta$.
Lo que sí tiene sentido es $U_\alpha U^\alpha$, o $J_\beta.J^\beta$, aquí el índice repetido indica sumatoria con símbolo omitido.
Los índices repetidos actúan como índices *tontos* o "*dummy*"; $J_\beta.J^\beta$ y $J_\alpha.J^\alpha$ dan el mismo número.

→Las expresiones tensoriales válidas emparejan exactamente los índices a la izquierda y a la derecha.

- $T^{\alpha\beta}=\rho_o.U^\alpha U^\beta$ es válida, representa un producto tensorial [matriz4x4] = [columna4x1] $_x$ [fila1x4]
  Tanto a la izquierda como a la derecha hay entidades de 2 índices elevados α,β
- $f_\alpha=F_{\alpha\beta}.J^\beta$ es válida, significa [vector4x1] = [matrix4x4] $_x$ [vector4x1]
- $F^\alpha= -\partial_\alpha\Phi$ es inválida; el índice de la izquierda es alto y el de la derecha es bajo
- $R^\lambda{}_{\mu\lambda\beta}=R_{\mu\beta}$ tiene sentido (signifique lo que signifique)
- $U_\alpha U^\beta=M_\alpha$ no tiene sentido, el superíndice β de la izquierda no aparece a la derecha
- $U_\beta.U^\beta=-c^2$ es correcto: [vector1x4] $_x$ [vector4x1]= [escalar1x1] (c^2 es un número)

→La métrica o norma de un cuadrivector es el producto escalar de su versión covariante por su versión contravariante. $\langle X,X\rangle = X_\alpha X^\alpha$ (omitimos el signo de suma Σ_α)
Expandiendo explícitamente X_α en función del tensor métrico, tenemos: $\langle X,X\rangle=g_{\alpha\beta}X^\beta X^\alpha=X^\alpha g_{\alpha\beta}X^\beta$
Es otra forma de expresar el doble producto matricial que define la forma cuadrática [X*].[g].[X]
→Los invariantes se forman combinando una cantidad covariante con una contravariante, un caso particular es la métrica y los desplazamientos infinitesimales $(dS)^2 = dX_\alpha.dX^\alpha$.

Las leyes físicas con buena perspectiva de ser invariantes frente a la transformación de coordenadas son las que se expresan de esta forma; repasaremos a continuación varios ejemplos ya introducidos en los capítulos 2 y 3. En aquellas ocasiones podía causar cierta confusión el hecho de que a veces aparecía el producto escalar habitual y otras veces aparecía el producto escalar "raro" con el signo cambiado.
En este capítulo 4, con los nuevos conceptos de métrica y de notación tensorial, estamos mejor equipados para unificar todas las ecuaciones dentro de la misma formulación:
→los productos escalares "normales" surgen cuando combinamos cuadrivectores que ya están en su forma opuesta: uno covariante, otro contravariante.
→los productos escalares "raros" aparecen cuando combinamos 2 cuadrivectores covariantes o 2 contravariantes; el signo surge porque hay de por medio un producto por el tensor métrico diag(-,+,+,+).

4.5.3 Conservación de la carga:

Cuadrivector de derivadas	$\partial_\alpha = (1/c.\partial_t , \partial_x ,\partial_y , \partial_z)$	covariante, subíndice α.
Cuadrivector carga-corriente	$J^\alpha = (\rho.c, J_x, J_y, J_z)$	contravariante, superíndice α.
Ecuación de continuidad	$\partial_\alpha J^\alpha = 0$	invariante
Notación anterior:	$\partial 4 \cdot J4 = 0$	

Estamos omitiendo el símbolo de suma desde α=0 hasta α=3. Si lo tenemos en cuenta y expandimos en forma explícita la suma, nos queda la expresión más familiar $\nabla \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0$.

4.5.4 Ondas armónicas planas:

Cuadrivector espacio-tiempo	$X^\alpha = (c.t, x, y, z)$	contravariante
Cuadrivector de onda	$K^\alpha = (\omega/c,k_x,k_y,k_z)$	contravariante
Versión covariante de *K*	$K_\alpha=(-\omega/c,k_x,k_y,k_z)$	covariante $K_\alpha = g_{\alpha\beta}K^\beta$

Aclaramos: K_α es una versión covariante de K^α.
Se obtiene de multiplicar por el tensor métrico, el cual tiene +1 en todos los elementos de su diagonal salvo un –1 en el casillero [0,0].
Lo que da como resultado que K_α es igual a K^α salvo por su componente temporal negada.
Debemos advertir sobre un concepto que pudo generar alguna dificultad a lo largo de los capítulos 2 y 3, cuando recién empezábamos a ver las leyes físicas basadas en cuadrivectores y nuestro panorama era más limitado:
Las magnitudes físicas *no son en sí mismas* covariantes ni contravariantes. Lo que ocurre es que algunas ecuaciones físicas se formulan utilizando *sus componentes contravariantes* y en otras ecuaciones físicas aparecen los *componentes covariantes*.
→El cuadrivector de onda admite dos expresiones: contravariante con +ω/c en su componente temporal, y covariante con –ω/c en su componente temporal.
¿Qué es $K^\alpha X^\alpha$? No tiene sentido, es una expresión tensorial mal formada con un índice alto repetido.

En la forma $K_\alpha X^\alpha$ sí tiene sentido y está describiendo a un invariante.
Si lo expandimos explícitamente sumando desde α=0 hasta α=3 nos queda $-\omega.t + k_x.x + k_y.y + k_z.z$
Es decir, $\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega.t$
Es el ángulo de fase ϕ que aparece en el argumento de las exponenciales complejas que definen las funciones de onda armónica plana $f(\vec{r},t) = e^{-j\phi}=e^{j(\omega.t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$
$\phi = K_\alpha X^\alpha$ →antes lo anotábamos como $\phi=<K4,X4>$ o como $\phi=K_4 \cdot X4$
En los capítulos 2 y 3 habíamos observado que esta fase era un buen candidato a magnitud invariante.
Si en el referencial Σ la fase ϕ es tal que describe un máximo local o un mínimo local (para cierto punto del espaciotiempo), en Σ' debe conservarse ese carácter de máximo o mínimo. O sea, ϕ'=ϕ.

4.5.5 Condición de calibre o "*gauge*":

Cuadrivector de derivadas	$\partial_\alpha = (1/c.\partial_t , \partial_x ,\partial_y , \partial_z)$	covariante
Cuadrivector potencial	$A^\alpha = (\Phi/c, A_x, A_y, A_z)$	contravariante
Condición de calibre Lorenz	$\partial_\alpha A^\alpha = 0$	invariante
Notación anterior	$\partial 4 \cdot A4 = 0$	

Que expandida resulta en $\nabla\cdot\vec{A} + 1/c^2.\partial_t\Phi = 0$
Un cambio de calibre consiste en sustituir la pareja de potenciales $(\Phi/c,\vec{A})$ por otra pareja que produzca los mismos campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Advertimos un posible problema de notación: si a los nuevos potenciales los llamamos $(\Phi_1/c,\vec{A_1})$, el subíndice podría confundirse con índices covariantes. Si los anotamos con primas $(\Phi'/c,\vec{A'})$, podría parecer que hay de por medio un cambio de referencia Σ→Σ' y no es el caso, seguimos trabajando en el mismo referencial Σ con las mismas coordenadas.
A falta de otra notación, marcamos en cursiva y con subrayado los potenciales recalibrados: $(\underline{\Phi}/c,\underline{\vec{A}})$.
La transformación genérica involucra una función $f(t,\vec{r})$ que varía con la posición y el tiempo.

$$\underline{\Phi} = \Phi - \partial_t f$$
$$\underline{\vec{A}} = \vec{A} + \nabla f$$

El campo magnético se mantiene debido a que el rotor de un gradiente es nulo:

$$\underline{\vec{B}} = \nabla \wedge \underline{\vec{A}} = \nabla \wedge (\vec{A} + \nabla f) = \nabla\wedge\vec{A} + \nabla\wedge(\nabla f) = \nabla\wedge\vec{A} \quad \rightarrow \underline{\vec{B}} = \vec{B}$$

El campo eléctrico también se mantiene luego del cambio de calibre:

$$\underline{\vec{E}} = -\nabla\underline{\Phi} - \partial_t\underline{\vec{A}}$$
$$\underline{\vec{E}} = -\nabla(\Phi - \partial_t f) - \partial_t(\vec{A} + \nabla f)$$
$$\underline{\vec{E}} = -\nabla\Phi + \nabla\partial_t f - \partial_t\vec{A} - \partial_t\nabla f \quad \rightarrow \text{cancelamos la doble derivada}$$
$$\underline{\vec{E}} = -\nabla\Phi - \partial_t\vec{A} \quad \rightarrow \underline{\vec{E}} = \vec{E}$$

En definitiva, la transformación de calibre no cambia el sistema físico que estamos describiendo (fuerzas sobre una partícula $\vec{f}=q.(\vec{E}+\vec{u}\wedge\vec{B})$, potencia transmitida por vector de Poynting $\vec{S}=\vec{E}\wedge\vec{B}/\mu_o$…etc).

Tenemos un grado de libertad basado en la función $f(t,\vec{r})$, que podemos ajustar para alinearnos con alguna condición de calibre que favorezca los cálculos de cierto escenario particular.
El grado de libertad implica que podemos elegir una relación extra para imponer a los potenciales $\vec{A},\Phi$.
Por ejemplo, en problemas que involucran ondas electromagnéticas suele ser conveniente pasar del calibre de Coulomb $\nabla\cdot\vec{A} = 0$ a un calibre de Lorenz $\nabla\cdot\underline{\vec{A}} + \partial_t\underline{\Phi}/c^2 = 0$

$\nabla\cdot\underline{\vec{A}} + \partial_t\underline{\Phi}/c^2 = 0$ →calibre nuevo de Lorenz, queremos que se cumpla
$\nabla\cdot(\vec{A} + \nabla f) + \partial_t(\Phi - \partial_t f)/c^2 = 0$ →aplicamos la "transformación gauge"
$\nabla\cdot\vec{A} + \nabla\cdot\nabla f + \partial_t(\Phi - \partial_t f)/c^2 = 0$ →calibre anterior de Coulomb
$0 + \nabla\cdot\nabla f + \partial_t(\Phi - \partial_t f)/c^2 = 0$
$\nabla^2 f - \partial_{ct}{}^2 f = -\partial_t \Phi/c^2$

→Obtenemos entonces $f(t,\vec{r})$ como solución de una ecuación diferencial.
Dados $(\Phi/c,\vec{A})$ calibrados por la condición de Coulomb, utilizamos esta $f(t,\vec{r})$ para pasar a una nueva pareja de potenciales $(\underline{\Phi}/c,\underline{\vec{A}})$ calibrados según la condición de Lorenz.

En notación tensorial, podemos demostrar que la transformación de calibre se escribe $\underline{A}_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha f$

$A^\alpha = (\Phi/c, A_x, A_y, A_z)$ componentes contravariantes del cuadri-potencial
$A_\alpha = (-\Phi/c, A_x, A_y, A_z)$ componentes covariantes, se niega la parte temporal
$\underline{A}_\alpha = (-\underline{\Phi}/c, \underline{A}_x, \underline{A}_y, \underline{A}_z)$ potenciales covariantes en el nuevo calibre
$\partial_\alpha f = (1/c.\partial_t f, \partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$ cuadrigradiente de la función de calibración $f(t,\vec{r})$

En condiciones normales no es usual tener que lidiar con las funciones de calibración $f(t,\vec{r})$, se usan mayormente como sostén teórico. A efectos prácticos hacemos uso del grado de libertad imponiendo una condición de calibre a la divergencia de $\vec{A}$, sabiendo que la $f(t,\vec{r})$ necesaria se puede calcular.

Importante: Las transformaciones de calibre y las condiciones de calibre deben ser bien formuladas en forma tensorial, de manera que puedan luego resistir un cambio de coordenadas. En nuestro caso no sería acertado mezclar índices altos y bajos ($A^\alpha + \partial_\alpha f$) o expresar incorrectamente la divergencia repitiendo índices bajos $\partial_\alpha A_\alpha$. Las formulaciones tensorialmente correctas son:

Transformación de calibre genérica: $\underline{A}_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha f$
Condición de calibre de Lorenz: $\partial_\alpha A^\alpha = 0$

4.5.6 Ecuación del trabajo y la energía:

Cuadrivector velocidad	$U^\alpha = (c,u_x,u_y,u_z)$	contravariante
Cuadrivector fuerza-potencia	$F^\alpha = (\dot{W}/c,f_x,f_y,f_z)$	contravariante
Cuadrifuerza covariante	$F_\alpha = (-\dot{W}/c,f_x,f_y,f_z)$	versión covariante $F_\alpha = g_{\alpha\beta}F^\beta$

La ecuación del trabajo y la energía no es más que $F_\alpha U^\alpha = \vec{f}\cdot\vec{u} - \dot{W} = 0$
Antes la anotábamos como $\langle F4, U4\rangle = 0$ o como $F_4 \cdot U4 = 0$
Los productos escalares *raros* con un signo negativo, que encontrábamos en capítulos anteriores, empiezan a adquirir significado a la luz de estas interpretaciones métricas.
También adquieren significado las reflexiones como las de 2.2.2, respecto a corregir las discordancias definiendo una versión de la cuadrifuerza con su componente negada.

Repetimos la aclaración que hicimos con el cuadrivector de onda: la cuadrifuerza admite una versión contravariante y una versión covariante, que difieren en el signo de la componente temporal.
Los cuadrivectores pueden transformarse como los vectores base o como los diferenciales de coordenadas, y ese comportamiento se puede invertir por el solo hecho de cambiar el signo de la componente-0. Es una curiosidad de la Transformación de Lorentz y de la Relatividad Especial, anticipamos que *esto no se va a cumplir en coordenadas curvilíneas o en los espaciotiempos más complejos de la Relatividad General*.

Observación: En el capítulo 5 ampliaremos detalles sobre lo que ya anticipamos en 4.3 cuando advertíamos que la forma actual de las expresiones de F_α y U^α es todavía levemente incorrecta; hace falta incluir factores de escala. De cualquier manera los factores de escala no alteran la "perpendicularidad 4D" entre los cuadrivectores $F_\alpha U^\alpha = 0$. *Ortogonalidad según la métrica de Minkowski, no la de Euclides*.

4.5.7 Ecuación de ondas:

Por último, debemos mencionar que existe un procedimiento para convertir un cuadrivector covariante a su forma contravariante. La operación se llama "elevación de índices" (opuesta a la "bajada de índices") y consiste en la multiplicación por el tensor métrico de índices altos.

En el caso de la cuadri-derivada, las relaciones a tener en cuenta son: $\partial^\alpha = g^{\alpha\beta}\partial_\beta$, $\partial_\alpha = g_{\alpha\beta}\partial^\beta$

versión contravariante: $\partial^\alpha = (-1/c.\partial_t , \partial_x , \partial_y , \partial_z)$

versión covariante: $\partial_\alpha = (1/c.\partial_t , \partial_x , \partial_y , \partial_z)$

Observación: $g^{\alpha\beta}$, visualizado como matriz, es la inversa de $g_{\alpha\beta}$. En el caso de la métrica de Minkowski la diferencia no se nota, sigue siendo una matriz diagonal con (-1,+1,+1,+1).

El producto $\partial_\alpha\partial^\alpha$ debería ser un invariante, que expandido resulta en $\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - 1/c^2.\partial_t^2 = \nabla^2 - 1/c^2.\partial_t^2$

Este operador de derivadas parciales se llama operador de D'Alembert, D'Alembertiano o d'lambertiano.

En los capítulos 2 y 3 lo anotábamos como $<\square,\square>$. Era otro ejemplo de producto escalar "raro", el signo negativo surgía porque estábamos combinando ambos en su forma covariante.

Advertencia: Aquí los factores 2 son exponentes, no superíndices. Significan "derivar 2 veces".

La constancia de la velocidad de la luz está ligada a la invarianza de este operador.

Si una onda electromagnética está descrita en Σ' por los potenciales Φ', A_x', A_y', A_z' y cada uno de ellos verifica que su D'Alembertiano es nulo, entonces la descripción en Σ también deberá ser con potenciales que verifican la ecuación de ondas.

Reflexión: ¿cuál es la norma del cuadrivector de onda $K^\alpha = (\omega/c,k_x,k_y,k_z)$?

Norma = $K_\alpha K^\alpha$

Norma = $-(\omega/c)^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

Norma = $-\omega^2/c^2 + k^2$

Norma = 0

¡Esta es una geometría curiosa que permite vectores no nulos con longitud nula!

Pero así ocurre efectivamente con la longitud del cuadrivector de onda: en una zona donde circula energía electromagnética de una sola frecuencia esta norma es nula tanto en Σ como en Σ'.

Porque se cumple:

$\omega = c.k$ en Σ $\qquad\qquad$ $\omega' = c.k'$ en Σ'

Así como los desplazamientos de la luz tienen métrica nula $dX_\alpha.dX^\alpha = 0$, también el cuadrivector de onda tiene métrica nula $K_\alpha.K^\alpha = 0$.

5. MECÁNICA RELATIVISTA Y ELECTROMAGNETISMO.

En este capítulo exploraremos en más detalle la aplicación de los conceptos relativistas a escenarios mecánicos que relacionan velocidad, fuerza, aceleración y cantidad de movimiento. El estudio dinámico de las fuerzas nos dará argumentos para sostener el carácter límite que parece tener la velocidad de la luz. Debido al protagonismo de la velocidad de la luz 'c' en la Relatividad y al hecho de que la luz es una onda electromagnética, seguiremos sirviéndonos del Electromagnetismo como herramienta de apoyo.

5.1 Cuadrivector "velocidad propia".

Cuando nombramos al cuadrivector velocidad (c,u_x,u_y,u_z) y lo clasificamos al pasar como contravariante cometimos un cierto desliz. Lo cierto es que el carácter contravariante no se sobreentiende ni surge de manera inmediata sino que hay que justificarlo matemáticamente, según cómo se transforman sus componentes al pasar de un sistema Σ a otro Σ'.
En el caso de la velocidad tenemos:

$\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ la velocidad de una partícula vista en el referencial Σ.
$\vec{u'}=(u'_x,u'_y,u'_z)$ la misma magnitud medida en el referencial Σ'.

Las fórmulas de adición de velocidades de 4.3 muestran que *u'_x, u_x no están relacionadas por una transformación de Lorentz*. Falta el factor 'γ' y en cambio aparecen factores $(1+u_x.v_o/c^2)$ en el denominador.

Quienes sí están relacionados por una transformación de Lorentz exacta son los diferenciales de desplazamiento; si los hacemos aparecer explícitamente en las velocidades tenemos:

$u_x=dx/dt$ $u'_x=dx'/dt'$

El carácter contravariante, que surgió naturalmente con la Transformación de Galileo, se pierde ahora al pasar a la Transformación de Lorentz. El problema está en dividir por diferenciales de tiempo diferente: dt en un caso, dt' en el otro. Tendríamos que dividir por un mismo tiempo en ambos casos, por un dτ en el cual ambos sistemas Σ y Σ' puedan ponerse de acuerdo; un tiempo que dependa de la partícula y no del sistema de referencia Σ o Σ'.
El tiempo invariante que necesitamos se llama tiempo propio 'τ' y se concibe de la siguiente manera:

Supongamos que una partícula móvil realiza un pequeño desplazamiento descrito por:

$d\vec{r} = \vec{u}.dt$ en Σ $d\vec{r'} = \vec{u'}.dt'$ en Σ'

En cada uno de los sistemas calculamos el tiempo propio dτ o tiempo transcurrido en un referencial co-móvil solidario a la partícula, en el cual la partícula se ve quieta.

- Para alcanzar ese referencial de reposo desde Σ debemos realizar una transformación de Lorentz con velocidad $\vec{u}$ y factor $\gamma_u = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$
- Para situarnos en ese referencial de reposo desde Σ' debemos realizar otra transformación de Lorentz con velocidad $\vec{u'}$ y factor $\gamma'_u = 1/\sqrt{1-u'^2/c^2}$

Ambos factores γ_u , γ'_u son diferentes entre sí y posiblemente diferentes al 'γ' de la transformación entre Σ y Σ', debemos prestar atención a no naufragar entre tantos gamma.

Aplicando en cada caso la fórmula de dilatación temporal de 4.2, tenemos

$dt = \gamma_u . d\tau$ $dt' = \gamma'_u . d\tau$

La receta para obtener un vector de velocidad "*bien-variante*" es derivar respecto al tiempo propio 'τ' en lugar del tiempo coordenado 't'. El cuadrivector resultante es la versión relativísticamente correcta de la velocidad propia o cuadrivelocidad:

$U^\alpha = dX^\alpha/d\tau$ $U'^\alpha = dX'^\alpha/d\tau$

$d/d\tau = \gamma_u.d/dt$ $d/d\tau = \gamma'_u.d/dt'$

Las componentes de estas velocidades propias son:

$U^{\alpha} = \gamma_u\ (c, u_x, u_y, u_z)$ $\qquad\qquad$ $U'^{\alpha} = \gamma'_u\ (c, u'_x, u'_y, u'_z)$

Estos factores de escala (γ_u,γ'_u) diferentes según el referencial son los que se insinuaban en la sección 4.3.3 para construir una cuadrifuerza relativista en base a las componentes de la fuerza clásica.

Ejercicio (advertencia: ¡muy trabajoso!): Utilizar las fórmulas 4.3.1 para demostrar que las componentes de ambos cuadrivectores están relacionadas por una transformación de Lorentz.

Observación: La cuadrivelocidad ya la habíamos introducido en el capítulo 2.

Utilizando la notación de los primeros capítulos, la definíamos como $U4=(c,\vec{u})$

También habíamos encontrado que muchos cuadrivectores se combinaban manteniendo invariante la aplicación de producto escalar con signo modificado: $<A4,U4>$.

La aplicación del cuadrivector consigo mismo es la norma $<U4,U4>$.

Con la primera definición del capítulo 2, esta norma no era invariante al cambiar de referencia.

$<U4,U4> = u^2 - c^2$

$<U'4,U'4> = u'^2 - c^2$

El factor γ_u visto en este capítulo 5 asegura la invarianza que estamos necesitando.

Las nuevas definiciones (inspiradas en la idea del tiempo propio) son:

$U4 = \gamma_u\ .(c,\vec{u})$ $\qquad\qquad$ $<U4,U4> = \gamma_u^2.(u^2 - c^2) = -c^2$

$U'4 = \gamma'_u\ .(c,\vec{u'})$ $\qquad\qquad$ $<U'4,U'4> = \gamma'^2_u.(u'^2 - c^2) = -c^2$

En nuestra nueva notación tensorial, la norma invariante la escribimos $U_\alpha U^\alpha = -c^2$.

5.1.1 Cuadrivelocidad de portadores de carga:

Consideramos una porción de material conductor y una "nube" de partículas cargadas.

Clasificamos a las partículas en clases de equivalencia numeradas con índice 'i', donde cada índice 'i' representa una cierta velocidad promedio $\vec{u[i]}$ que describe al grupo de cargas.

- n[i] = densidad de partículas por unidad de volumen que pertenece a la clase 'i'
- q[i] = carga de cada miembro del grupo i-ésimo
- $\vec{u[i]}$ = velocidad representativa del grupo de cargas 'i'
- $\gamma[i] = 1 / \sqrt{1-u_i^2/c^2}$ = factor gamma de contracción de longitudes

En la sección 4.1 habíamos visto un modelo simplificado de material conductor basado en 2 clases de equivalencia:

1. núcleos fijos (iones) con carga +e
2. portadores móviles (electrones) con carga –e, todos viajando a la misma velocidad $-v_m$.

Aquí simplemente generalizamos el modelo anterior para contemplar una partición en una mayor cantidad de clases de equivalencia.

Advertimos que n[i] es la *densidad propia* medida en un referencial solidario a las cargas de ese grupo-i.

Al momento de calcular la contribución del grupo-i a la densidad de carga total, debemos tener en cuenta que la dimensión paralela al movimiento sufre una contracción con factor $\gamma[i]$, mientras que las dimensiones transversales no sufren alteración. Al dividir la carga entre un volumen contraído, la densidad aumenta.

Resultando que la contribución $\rho[i]$ contiene entonces un factor de Lorentz y la densidad de carga macroscópica se expresa como sumatoria:

$$\rho = \sum_i \rho[i] = \sum_i q[i].n[i].\gamma[i]$$

Por otro lado, el vector macroscópico de densidad de corriente por unidad de área también es sumatoria de contribuciones i-ésimas:

$$\vec{J} = \sum_i q[i].n[i].\gamma[i].\vec{u[i]}$$

El cuadrivector carga-corriente se expresa entonces como:

$$J^\alpha = (c\rho,\vec{J})$$

$$J^\alpha = \sum i\ q[i].n[i].(c.\gamma[i], \gamma[i].\vec{u[i]})$$

$$J^\alpha = \sum i\ q[i].n[i].\ U^\alpha[i]$$

Vemos que al separar el factor común queda la cuadri-velocidad de los portadores de carga.
Esto nos muestra hasta qué punto están unidas todas las magnitudes físicas unas con otras.
No cualquier combinación de un escalar + un vector da origen a un cuadrivector bien variante;
en este caso ρ y $\vec{J}$ sí forman un buen cuadrivector porque son combinación lineal de cuadrivelocidades.

Por "*bien variante*" nos referimos a que admite una forma covariante y una forma contravariante compatibles con las transformaciones de Lorentz, para poder participar de ecuaciones físicas invariantes ante un cambio de referencia.

5.2 Cantidad de movimiento relativista.

Buscamos una cantidad de movimiento relativista (o sea, "*bien variante*" frente a transformaciones de Lorentz) que guarde el mayor parecido posible con la cantidad de movimiento clásica y que coincida con ella en el límite de las bajas velocidades.
El primer candidato a cantidad de movimiento es el producto de la velocidad propia por la masa de la partícula. Definimos: $P^\alpha = m_o.U^\alpha$

Dejando de lado por el momento la componente-0 temporal, nos concentramos en la parte espacial y vemos que se expresa como $\vec{p} = m_o.\gamma_u.\vec{u}$. Esto admite dos interpretaciones según cómo agrupemos:

$\vec{p} = (m_o) \;.\; (\gamma_u.\vec{u})$ = (masa clásica) x (velocidad relativista)

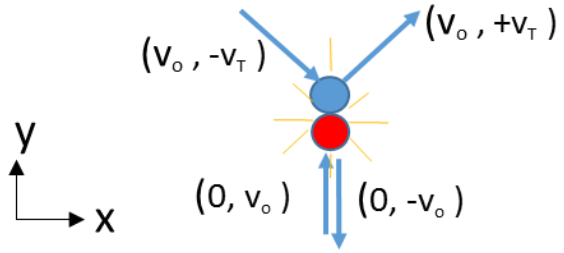
$\vec{p} = (m_o.\gamma_u) \;.\; (\vec{u})$ = (masa relativista) x (velocidad clásica)

m_o = masa en reposo o masa propia, $m_o.\gamma_u$ = masa relativista o masa en movimiento.
Mantenemos la conducta de llamar "propia" a toda magnitud medida en un referencial solidario (tiempo propio, longitud propia). El concepto de "masa relativista" sugiere que los objetos *pesan* más cuanto más rápido se mueven. No es que contengan más materia sino que pesan más en el sentido de que ofrecen mayor inercia, cuesta más acelerarlos. Y también transmiten más impulso cuando chocan. Para reforzar esta idea tan poco "clásica", comprobaremos a continuación que esta masa relativista resulta útil en escenarios que involucran colisiones.

5.2.1 Choque de bolas:

Consideramos dos bolas b_1,b_2 idénticas, obtenidas del mismo lote de fabricación.
Las sometemos a un choque elástico en un plano x,y de acuerdo con los siguientes detalles geométricos:

- bola1=roja, velocidad $\vec{u_1}=v_o.\hat{y}$
- bola2=azul, velocidad $\vec{u_2}=v_o.\hat{x} - v_T.\hat{y}$



En el momento de la colisión, la superficie de contacto entre ambas esferas está alineada con el plano (xz). Lo que implica que las fuerzas involucradas son solamente según la dirección $\hat{y}$ (perpendicular a la superficie de contacto) →entonces ambas bolas mantienen su componente de velocidad u_x.
Para simplificar la aritmética suponemos que la velocidad transversal v_T es tal que ambas bolas simetrizan o niegan su cantidad de movimiento p_y durante el choque. Las nuevas velocidades pasan a ser:

- bola1 velocidad $\vec{u_1}= -v_o.\hat{y}$
- bola2 velocidad $\vec{u_2}=v_o.\hat{x} + v_T.\hat{y}$

Es inmediato ver que esta configuración conserva la energía cinética y es compatible con la hipótesis de choque elástico sin fricción. También se comprueba fácil que la cantidad de movimiento p_x se conserva.
Respecto a la cantidad de movimiento transversal p_y: debe conservarse (como en todo choque) pero también debe negarse por la forma en que elegimos v_T. El único número que es igual a su negado es el cero, por lo tanto: $p_y = m_1.v_o - m_2.v_T = 0$ y $m_2/m_1=v_o/v_T$.
Si nos basamos en argumentos puramente clásicos, utilizar bolas idénticas implica $m_1=m_2$ y $v_o=v_T$, es decir que el ángulo de inclinación es 45 grados.

En Relatividad esperamos que esta conservación de la cantidad de movimiento también se cumpla en cualquier otro referencial, por ejemplo en Σ' que se mueve con velocidad $\vec{v_o}=v_o.\hat{x}$. Para obtener las velocidades de Σ' debemos utilizar las fórmulas de adición relativista de 4.3.1.

$u'_x=(u_x-v_o)/(1-u_x.v_o/c^2)$ $u'_y=u_y/\gamma/(1-u_x.v_o/c^2)$

Para la bola-1

$u'_{x1}=(u_{x1}-v_o)/(1-u_{x1}.v_o/c^2)$ →sustituimos $u_{x1}=0$

$u'_{x1}=(0-v_o)/(1-0.v_o/c^2)$

$u'_{x1}= -v_o$

$u'_{y1}=u_{y1}/\gamma/(1-u_{x1}.v_o/c^2)$ → sustituimos $u_{x1}=0$, $u_{y1}=v_o$.

$u'_{y1}=v_o/\gamma/(1-0.v_o/c^2)$

$u'_{y1}= v_o/\gamma$

Para la bola-2

$u'_{x2}=(u_{x2}-v_o)/(1-u_{x2}.v_o/c^2)$ →sustituimos $u_{x2}= v_o$

$u'_{x2}=(v_o -v_o)/(1-v_o.v_o/c^2)$

$u'_{x2}= 0$

$u'_{y2}=u_{y2}/\gamma/(1-u_{x2}.v_o/c^2)$ → sustituimos $u_{x2}=v_o$, $u_{y2}=-v_T$.

$u'_{y2}=-v_T/\gamma/(1-v_o.v_o/c^2)$

$u'_{y2}= -v_T/\gamma/(1-v_o^2/c^2)$ →identificamos $1/(1-v_o^2/c^2)= \gamma^2$

$u'_{y2}= -v_T/\gamma.(\gamma^2)$

$u'_{y2}= -v_T.\gamma$

Por otro lado, el problema visto desde Σ' es enteramente simétrico salvo por una inversión de roles.
La bola1 es ahora la que incide en forma oblicua, debe verificarse $u'_{y1}=v_T$.
Y la bola2 es la que tiene velocidad solo en dirección ŷ, debe cumplirse $u'_{y2}= -v_o$.

Combinando todas las relaciones llegamos a $v_o/\gamma = v_T$, $v_o=\gamma.v_T$ y por lo tanto $m_2=\gamma.m_1$.
A pesar de que las bolas son idénticas, sus cantidades de movimiento solo se conservan si en su cálculo se multiplican las velocidades por masas efectivas distintas, que difieren según el estado de movimiento de cada bola. En 5.2.1 proponíamos la cantidad de movimiento relativista escalando la cuadrivelocidad como $P^\alpha=m_o.U^\alpha$, que en su parte espacial vale $\vec{p} = m_o.\gamma_u.\vec{u}$
Veremos ahora que en este contexto, el cociente de masas efectivas necesario para la conservación de la cantidad de movimiento es justamente el que verifica $m_2/m_1=\gamma_2/\gamma_1$.

<u>Para la bola1</u>:

$1/\gamma_1^2 = 1 -u_1^2/c^2$ →sustituimos $u_1^2=u_{x1}^2 + u_{y1}^2 = 0^2 + v_o^2 = v_o^2$

$1/\gamma_1^2 = 1 -v_o^2/c^2$

$1/\gamma_1^2 =1/\gamma^2$

→ $\gamma_1 =\gamma$

<u>Para la bola2</u>:

$1/\gamma_2^2 = 1 -u_2^2/c^2$ →sustituimos $u_2^2=u_{x2}^2 + u_{y2}^2 = v_o^2 + v_T^2$

$1/\gamma_2^2 = 1 -v_o^2/c^2 -v_T^2/c^2$ →sustituimos $v_T= v_o/\gamma$

$1/\gamma_2^2 = 1 -v_o^2/c^2 - v_o^2.(1 -v_o^2/c^2) /c^2$ →factorizamos

$1/\gamma_2^2 = (1 -v_o^2/c^2)(1 -v_o^2/c^2)$

$1/\gamma_2^2 =1/\gamma^4$

→ $\gamma_2 =\gamma^2$

Entonces se cumple exactamente lo que buscábamos: $\gamma_2/\gamma_1= \gamma^2/\gamma=\gamma$

<u>Ejercicio</u>:
Repetir los cálculos en el referencial Σ' para demostrar que $m'_1/m'_2=\gamma$
(En ese referencial es la bola1' la que *pesa* más porque tiene velocidad $\vec{u'}_1$ en ambos ejes)

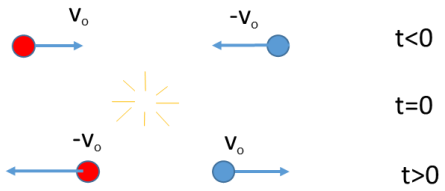
5.2.2 Centro de masas:

Ahora estudiamos otra colisión de bolas, analizando el problema desde el punto de vista del centro de masas y prestando atención a argumentos de simultaneidad relativa.

Consideramos dos bolas idénticas que en t<0 se aproximan en direcciones opuestas a lo largo del eje x:

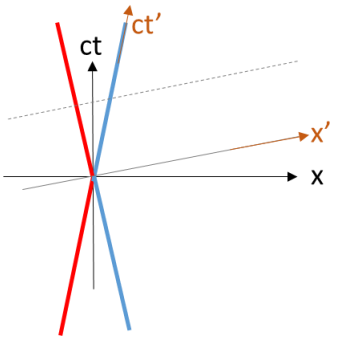
La bola1=roja avanza desde la izquierda con velocidad v_o⃗

La bola2=azul avanza desde la derecha con velocidad $-v_o$⃗.



En el instante t=0 ambas bolas chocan elásticamente en el origen espacial x=0,
y para t>0 salen disparadas con velocidades opuestas a las que traían inicialmente.

El diagrama espacio-tiempo x-ct muestra las trayectorias roja1 y azul2.
En este mismo diagrama es posible hacer el análisis según dos referenciales: Σ y Σ',
siendo Σ' otro referencial que se mueve respecto a Σ con velocidad v_o⃗.



Para t<0 la recta roja va *pegada* al eje ct', y luego en t>0 es la recta azul la que se alinea con el eje ct'.
El centro de masas es el eje ct⃗, dibujado en color negro.
La línea negra punteada (perpendicular a la roja) es de acuerdo con lo visto al inicio de la Transformación de Lorentz (capítulo 4.1) una línea de simultaneidad de Σ' para un cierto t'>0. Por la manera que intersecta a las trayectorias de las bolas podemos deducir que el centro de masas (eje ct⃗) no está exactamente a mitad de camino de ambas bolas cuando es visto por Σ': la bisectriz de un triángulo rectángulo no corta al cateto opuesto en su punto medio. La matemática exacta la veremos a continuación.

Las trayectorias luego del choque son:

Bola roja: $x_1 = -v_o.t$

Bola azul: $x_2 = +v_o.t$

Centro de masas: $x_C = 0.t$ (recta negra en el dibujo, bisectriz entre la azul y la roja)

Pasamos a describir este mismo experimento desde el referencial Σ' móvil.
En este nuevo referencial vemos, para t'<0, la bola roja quieta y la azul que se le acerca con velocidad aproximadamente ≈ $-2.v_o$ (no es exactamente igual a $2.v_o$ debido a la corrección relativista en la fórmula de adición de velocidades 4.3).
Luego del choque t'>0 vemos a la bola azul quieta y a la roja que se aleja con velocidad cercana a ≈ $-2.v_o$.

Bola roja: $x'_1 = -2v_o.t'/(1+v_o^2/c^2)$ según fórmula 4.3

Bola azul: $x'_2 = 0.t'$

Centro de masas: $x'_C = -v_o.t'$

En Σ' la abscisa del centro de masas NO es el promedio entre las abscisas de las bolas x'_1 y x'_2.
La relación exacta es un promedio ponderado por las masas móviles:

$x'_C = (m'_1.x'_1 + m'_2.x'_2)/(m'_1+m'_2)$

$(m'_1+m'_2).\ x'_C = m'_1.x'_1 + m'_2.x'_2$

→ x'_C difiere del promedio simple debido a que $m'_1 > m'_2$ por efecto relativista.

Sustituimos:

$-v_o \, .t'.(m'_1+m'_2) = -2v_o.t'/(1+v_o^2/c^2).m'_1 + 0.t'.m'_2$

$-v_o \, (m'_1+m'_2) = -2v_o/(1+v_o^2/c^2).m'_1 + 0.m'_2$

$1+m'_2/m'_1 = 2/(1+v_o^2/c^2)$

$m'_2/m'_1 = 2/(1+v_o^2/c^2) - 1$

$m'_2/m'_1 = (1-v_o^2/c^2)/(1+v_o^2/c^2)$

$m'_1/m'_2 = (1+v_o^2/c^2)/(1-v_o^2/c^2)$

Esta es la cuantificación de que la masa móvil (1) "*pesa*" más que la quieta (2) a los efectos del cálculo del centro de gravedad. Las cantidades m'_1 m'_2 son los pesos del promedio ponderado ("*weighted average*").

Demostraremos que este cociente es exactamente igual al cociente de "gammas" γ'_1/γ'_2.

Siendo: $\gamma'_1 = 1/\sqrt{1-u'^2_1/c^2}$ $\quad u'_1 = -2v_o/(1+v_o^2/c^2)$

$\gamma'_2 = 1/\sqrt{1-u'^2_2/c^2} = 1$ $\quad u'_2 = 0$

$u'^2_1 = 4.v_o^2/(1+v_o^2/c^2)^2$

$u'^2_1/c^2 = 4.v_o^2/c^2/(1+v_o^2/c^2)^2$

$1 - u'^2_1/c^2 = 1 - 4.v_o^2/c^2/(1+v_o^2/c^2)^2$

$(1+v_o^2/c^2)^2.(1 - u'^2_1/c^2) = (1+v_o^2/c^2)^2 - 4.v_o^2/c^2$ →expandimos cuadrado de binomio

$(1+v_o^2/c^2)^2.(1 - u'^2_1/c^2) = 1+2v_o^2/c^2+ v_o^4/c^4 - 4.v_o^2/c^2$

$(1+v_o^2/c^2)^2.(1 - u'^2_1/c^2) = 1-2v_o^2/c^2+ v_o^4/c^4$ →rearmamos cuadrado de otro binomio

$(1+v_o^2/c^2)^2.(1 - u'^2_1/c^2) = (1-v_o^2/c^2)^2$ →tomamos raíz cuadrada

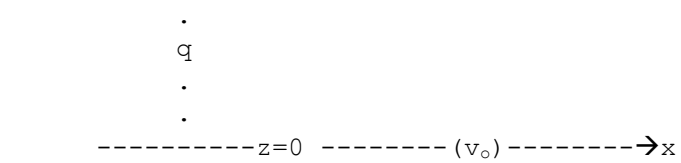
$(1+v_o^2/c^2).\sqrt{1 - u'^2_1/c^2} = (1-v_o^2/c^2)$

$1 / \sqrt{1 - u'^2_1/c^2} = (1+v_o^2/c^2)/(1-v_o^2/c^2)$

5.2.3 Diferencia de fuerzas:

En la sección 2.3.1 marcábamos una ruptura con la Física Clásica porque no podíamos todavía modelar el hecho de que fuera $f_x \neq f_x'$ en el experimento del condensador de placas paralelas.

Recordamos en qué consistía el experimento:



Un laboratorio móvil Σ' acelera cargas entre dos placas de condensador. En el referencial Σ se ve dicho laboratorio moviéndose a velocidad v_o según $\hat{x}$. Y allí aparece, además de la fuerza eléctrica en $\hat{z}$, una fuerza magnética en $\hat{x}$. Lo que era misterioso o preocupante en aquel entonces, toma forma ahora con los nuevos conceptos que venimos adquiriendo. La ecuación a tener en cuenta es $f_x = dp_x/dt$.

Si bien las cargas tienen $u_x = v_o$ cte, en el referencial Σ está variando la *cantidad de movimiento relativista*, que en su componente horizontal vale $p_x = m_o.\gamma_u.v_o$.

El aumento se manifiesta en el factor γ_u porque la velocidad total de la partícula se incrementa: no solo hay componente horizontal v_o sino también una velocidad vertical debido a la acción eléctrica.

$u^2 = u_z^2 + v_o^2$ produce un incremento en γ_u y por lo tanto en la masa relativista.

Entonces la existencia de una fuerza magnética horizontal es plenamente consistente con esta variación de cantidad de movimiento horizontal.

Ejercicio: Demostrar lo anterior. Si es necesario simplificar, aplicar límite clásico de las bajas velocidades.

Ejercicio: ¿Qué pasa si la carga es lanzada desde la placa(-) y se va frenando al acercarse a la placa(+)?

5.2.4 Anticipo de gravedad:

La ley de atracción gravitatoria, en la forma enunciada por Newton, involucra distancias. Esto crea una dificultad para la Relatividad Especial, porque las distancias dependen del punto de vista del observador. En el mejor caso en que aplicáramos las transformaciones de Lorentz a las coordenadas, luego tendríamos que verificar que las componentes de la fuerza se transformen como un buen cuadrivector (anticipo: no lo lograríamos).
También está el problema de la *transmisión instantánea* de los efectos: si el Sol explota y se divide en dos mitades que salen disparadas en direcciones opuestas, ¿en la Tierra tardaríamos unos 8 minutos en "ver" el hecho pero sentiríamos enseguida el cambio gravitatorio? Una transmisión de información a velocidad superlumínica comprometería la causalidad.
Por tales motivos pospondremos el estudio de la gravedad para el capítulo 6 dedicado a la Relatividad General.

Podemos intentar un primer acercamiento informal al tema, imaginando un escenario muy similar al anterior 5.2.3 lanzando masas en lugar de cargas desde el techo del laboratorio móvil. El campo que acelera ahora a las masas 'm' no es eléctrico sino gravitatorio.

```
#+++++++++z=L
#.
#m
#.
#.
#---------z=0  --------(vₒ)--------→x
```

La fuerza vertical queda multiplicada por un factor 'γ' al pasar de un referencial al otro, y admite la siguiente interpretación: el laboratorio móvil "ve" que la Tierra se está moviendo y que genera un campo gravitatorio más intenso como consecuencia de esa *masa relativista* incrementada.

Por otro lado, sigue apareciendo una diferencia de fuerzas horizontales originada por la "contaminación" espacio-tiempo entre los componentes de la cuadrifuerza ($f_x' \approx f_x - v_o/c^2.\dot{W}$ en el límite clásico de bajas velocidades).
En el referencial terrestre Σ, la masa 'm' al acelerar aumenta su factor γ_u y por lo tanto su cantidad de movimiento horizontal. Lo que repercute en que precisa una fuerza de empuje de la pared vertical para poder acompañar el movimiento del laboratorio con trayectoria $x=v_o.t$, porque si no hubiera ese empuje se iría "*atrasando*" levemente respecto al resto del laboratorio.

En el referencial móvil Σ', ese contacto de la pared no produce ninguna aceleración horizontal porque es compensado por una fuerza relativista de "*arrastre*" de naturaleza similar a la magnética.
Por analogía con la fuerza magnética 5.2.3, llamamos a esta fuerza "*gravitomagnética*". Se calcula a partir del producto vectorial $m.\vec{u'}\wedge\vec{B_g}$ y apunta según $-\hat{x}$ en el dibujo.

$\vec{u'} = u'.(-\hat{z})$ velocidad de caída libre
$\vec{B_g} = -v_o/c^2.g.\hat{y}$ campo "gravitomagnético" creado por la Tierra móvil.

La Tierra se ve moviéndose a la izquierda y es como si quisiera arrastrar a la partícula 'm' que cae.
Si el experimento se realizara en el medio del laboratorio, lejos de las paredes, habría un leve apartamiento respecto de la trayectoria vertical. Si el experimento se realiza junto a la pared tal como está dibujado, la caída es exactamente vertical.
Ejercicio: Comprobar lo anterior realizando una transformación de Lorentz entre Σ y Σ'.

5.3 Ecuación de Einstein $E=mc^2$.

La sección anterior 5.2 muestra la utilidad del factor γ_u a los efectos de construir una generalización aceptable de la masa y por lo tanto de la cantidad de movimiento: $\vec{p} = m_o.\gamma_u.\vec{u}$

Podemos encontrar implicaciones más profundas si miramos con atención la fórmula:

$m = m_o.\gamma_u$

$m = m_o/\sqrt{1-u^2/c^2}$

Por un lado, el denominador tiende a 0 cuando nos aproximamos a la velocidad de la luz $u \to c$.
La masa y la cantidad de movimiento divergen en ese límite, lo que sugiere que serían necesarias fuerzas o energías infinitas para llevar a un cuerpo o partícula hacia esos extremos.
Por otro lado, al aproximar para bajas velocidades $u \ll c$ tenemos:

$m \approx m_o.(1 + \frac{1}{2}.u^2/c^2)$ →expandimos

$m \approx m_o + \frac{1}{2}\, m_o.u^2/c^2$ →reconocemos la energía cinética clásica E_{cin}

$m \approx m_o + E_{cin}/c^2$

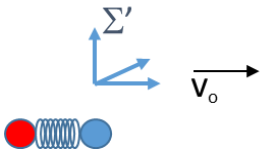
$m \approx m_o + \Delta m'$

$\Delta m' \approx E_{cin}/c^2$

La energía cinética actúa como un incremento de masa equivalente.
Veremos que lo inverso también se cumple: cualquier forma de energía 'E' tiene su masa 'm' equivalente según $E \approx m.c^2$. Intentaremos demostrar esto con rigor relativista, para velocidades no necesariamente bajas.

5.3.1 Equivalencia masa-energía:

Analizamos el siguiente experimento ejecutado en una plataforma móvill con velocidad v_o:



En el sistema Σ', la bola1=roja y la bola2=azul están inicialmente en reposo.
Ambas tienen igual masa propia m_o y se mantienen unidas mediante un resorte tenso de masa despreciable.
En el instante t'=0, el mecanismo de sujeción se libera y el resorte impulsa a las bolas que salen disparadas en direcciones opuestas: $u'_1 = -v_o$, $u'_2 = +v_o$

Ejercicio: Describir la situación desde el referencial Σ, donde se ve a Σ' moviéndose a velocidad v_o.
Los cálculos quedan propuestos como ejercicio, aquí mostramos los resultados más relevantes.

En $t<0$, el bloque formado por las dos masas y el resorte tenso tiene masa en reposo M_o, velocidad v_o y cantidad de movimiento $M_o.\gamma.v_o$
En $t>0$, las nuevas velocidades medidas son $u_1 = 0$, $u_2 = 2.v_o/(1+v_o^2/c^2)$.
Los factores gamma son respectivamente $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = (1+v_o^2/c^2)/(1-v_o^2/c^2)$.
La cantidad de movimiento es $m_o.\gamma_1.u_1 + m_o.\gamma_2.u_2 = 2.m_o.v_o.\gamma^2$
No hay fuerzas externas involucradas durante la liberación del resorte, solo son fuerzas internas entre los componentes del sistema. La cantidad de movimiento se conserva y deducimos $M_o = 2.m_o.\gamma$
El resultado $M_o > 2.m_o$ significa que la energía elástica almacenada en el resorte contribuye a la masa propia del bloque inicial. Lo mismo ocurriría con otras formas de energía (térmica, electrostática…etc).
→Un cuerpo debería ser más difícil de acelerar cuando está caliente o cargado eléctricamente.

Actividad: Analizar un choque inelástico con las siguientes características:
En Σ' dos bolas se aproximan en direcciones opuestas $\pm v_o$, chocan y luego quedan "*pegadas*" una a la otra.
Demostrar que la masa en reposo del bloque resultante vale $M = 2m_o.\gamma$, es decir, la energía cinética "perdida" durante la colisión pasó a formar parte de la inercia del bloque conjunto.

5.3.2 Partículas:

Nos preguntamos: ¿cuál es la generalización relativista de las ecuaciones de Newton para una partícula?
En Física Clásica tenemos las leyes de Newton en sus dos versiones:

$\vec{f} = m.\vec{a}$ $\qquad\qquad$ $\vec{f} = d\vec{p}/dt$

En un principio podríamos pensar que la generalización correcta es $\vec{f} = m.\vec{a}$,
siendo 'm' la masa relativista $m=\gamma.m_o$.
Para bajas velocidades $u \ll c$ ambas formulaciones son equivalentes, pero a altas velocidades la diferencia se vuelve apreciable y no pueden ser correctas las dos ecuaciones.

$d\vec{p}/dt = d(m.\vec{u})/dt$ $\qquad$ →derivada del producto
$d\vec{p}/dt = m.d\vec{u}/dt + (dm/dt).\vec{u}$
$d\vec{p}/dt = m.\vec{a} + (dm/dt).\vec{u}$
$d\vec{p}/dt \neq m.\ \vec{a}$

Veremos que es más conveniente utilizar la versión basada en $\vec{p}$, vector al cual le acabamos de confirmar su carácter cuadrivectorial bien-variante en 5.2.1.

- La sección 5.2.3 suma argumentos a favor de esta hipótesis porque explica bien la diferencia de fuerza horizontal entre las placas del condensador móvil (justamente asociada a dm/dt).
- La sección 5.4.3 confirmará que esta propuesta se alinea mejor con los principios variacionales.

Podemos sumar un tercer argumento para justificar nuestra elección: la "masa relativista" no es bienvariante, solo sirve como apoyo ilustrativo y cualitativo para entender mejor ciertos fenómenos pero no debemos embarcarnos en formular leyes cuantitativas basadas en esta masa. "Bienvarianza" para un escalar solo puede significar invarianza, en este contexto la única masa invariante es la masa propia m_o. Un escalar, cuando varía, ya no es bienvariante. En el mejor de los casos podrá formar parte de un objeto de mayor dimensión como un cuadrivector o tensor, entonces se transformará siguiendo las leyes de transformación de ese objeto al cual pertenece.

La cantidad de movimiento sí es bienvariante, seguimos entonces adelante eligiendo la ecuación $\vec{f} = d\vec{p}/dt$.
Adelantamos algo que veremos con más detalle a partir del capítulo 9: las leyes físicas no suelen involucrar una parte limitada de un vector o tensor; más bien se enuncian operando sobre la totalidad de un tensor4x4 o de un cuadrivector. En este caso extendemos esta relación $\vec{f}$ vs. $\vec{p}$ a los cuadrivectores que contienen en su parte espacial a $\vec{f}$, $\vec{p}$ respectivamente: $F^\alpha = dP^\alpha/dt$.

cuadri-momento $\quad P^\alpha = (m_0.\gamma_u.c,\ \vec{p})$
cuadrifuerza $\quad F^\alpha = (\dot{W}/c,\ \vec{f}) = (\ 1/c.dE/dt,\ d\vec{p}/dt\ ) = d/dt(E/c,\vec{p})$

Al ser $\dot{W}=dE/dt$ concluimos que la componente-0 del cuadrimomento debería ser $P^0=E/c=m_0.\gamma_u.c$
Entonces se cumple $\rightarrow E=m_0.\gamma_u.c^2=m.c^2$
El razonamiento puede dejar dudas porque involucra una derivación d/dt que no es "bien variante", habría sido más correcto d/dτ. Para estar más seguros seguimos un procedimiento alternativo más largo:

$\dot{W} = \vec{u}\cdot\vec{f}$ $\qquad$ potencia = fuerza * velocidad. →sustituimos fuerza
$\dot{W} = \vec{u}\cdot d\vec{p}/dt$
$\dot{W} = \vec{u}\cdot d\vec{p}/dt$ $\qquad$ $\rightarrow \vec{u}=\vec{p}/(m_o.\gamma_u)$
$\dot{W} = 1/(m_o.\gamma_u).\vec{p}\cdot d\vec{p}/dt$ $\qquad$ Reconocemos $p^2=\vec{p}\cdot\vec{p}$ y $dp^2/dt=2\vec{p}\cdot d\vec{p}/dt$
$\dot{W} = 1/(m_o.\gamma_u).½.dp^2/dt$

Por otro lado:

$1/\gamma_u^2 = 1-u^2/c^2$
$u^2 = c^2.(1-1/\gamma_u^2)$ $\qquad$ →hacemos aparecer $p= m_o.\gamma_u.u$
$m_o^2.\gamma_u^2.u^2 = m_o^2.c^2.(\gamma_u^2-1)$ $\qquad$ →sustituimos $p^2= m_o^2.\gamma_u^2.u^2$
$p^2 = m_o^2.c^2.(\gamma_u^2-1)$ $\qquad$ →derivamos d/dt
$dp^2/dt = m_o^2.c^2.2.\ \gamma_u.d\gamma_u/dt$
$½.dp^2/dt = m_o^2.c^2.\gamma_u.d\gamma_u/dt$

Sustituimos en la potencia:

$\dot{W} = 1/(m_o.\gamma_u).½.dp^2/dt = 1/(m_o.\gamma_u).\ m_o^2.c^2.\gamma_u.d\gamma_u/dt$

$\dot{W} = m_o.c^2.d\gamma_u/dt$

$\dot{W}= d/dt\ [m_o.\gamma_u.c^2]$

$\dot{W}=dE/dt$ potencia $\dot{W}$= derivada temporal de la energía E

$E=m_o.\gamma_u.c^2$

Siendo $m= m_o.\gamma_u$ $\rightarrow E=mc^2$

Comentario: Los partidarios de utilizar un sistema de unidades con c=1 escribirían esta ecuación como E=m. Podría parecer que la ecuación pierde parte de su gracia al faltarle el factor c^2 que la hizo famosa, sin embargo no deja de ser una formulación conceptualmente valiosa:
→E=m está diciendo que masa y energía son lo mismo, equivalentes, intercambiables.

Curiosidad histórica: *Esta Ecuación de Einstein adquirió fama, entre otros motivos, por la forma en que predecía y cuantificaba la obtención de energía nuclear a partir de reacciones atómicas en donde la masa de los productos era menor a la masa de los reactivos. Energías* ***enormes*** *debido al factor* c^2.

En lo que respecta a nuestro trabajo, podemos encontrarle una utilidad más modesta a esta ecuación de Einstein: darle un nombre a la componente-0 temporal del cuadrivector $P^\alpha = (m_o.c.\gamma_u, \vec{p}) = (E/c,\vec{p})$
Con esto se justifica el nombre "cuadrivector energía-momento" o "cuadrivector energía-impulso" que se le da en algunos textos. Energía en la componente temporal, momento o impulso en las partes espaciales.

La norma de este cuadrivector debe ser invariante,

$P_\alpha P^\alpha = m_o.U_\alpha\ .\ m_oU^\alpha = m_o^2.U_\alpha U^\alpha = m_o^2\gamma_u^2(-c^2+u^2)= -m_o^2c^2$

Por otro lado, sumando los cuadrados de cada componente y cuidando el signo de la componente-0, tenemos

$P_\alpha P^\alpha= p^2-E^2/c^2$

Igualando sale $p^2-E^2/c^2 = -m_o^2c^2$

$$E^2 - p^2\,c^2 = m_o^2c^4$$

5.3.3 Fotones:

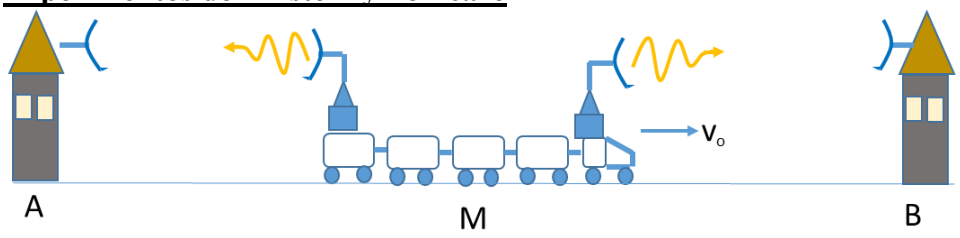
Esta relación anterior es interesante porque puede aplicarse también a la descripción corpuscular de la luz. El corpúsculo elemental de luz es un fotón descrito habitualmente como una partícula '*sin masa*' o '*de masa nula*'. Con lo visto en este documento debemos aclarar: *la que es nula es la masa en reposo* $m_o=0$.
Pero su masa relativista no es nula porque surge de un producto indeterminado $0.\infty \rightarrow m=m_o.\gamma_u$
Los fotones viajan a la velocidad de la luz, u=c, $\gamma_u=\infty$. Pueden verse como el caso límite en que $m_o\rightarrow 0$ y $\gamma_u\rightarrow\infty$, pero el producto $m_o.\gamma_u$ no vale 0 ni ∞ sino que adquiere el valor finito $m=E/c^2$. Esta masa efectiva o equivalente 'm' es la responsable de que el fotón transporte energía E y cantidad de movimiento p.

Más aún, en la Mecánica Cuántica encontramos las relaciones:

$E=\hbar\omega$=energía $p=\hbar k$=momento $\hbar=h/(2\pi)$=Constante de Planck

Al ser $\omega=c.k$ tenemos $E=p.c$, compatible con partículas relativistas con masa en reposo nula.

Experimentos de Einstein y Poincaré:



Poincaré en 1900, y Einstein en 1905, realizaron experimentos mentales similares para poner de manifiesto la equivalencia $E=Mc^2$ en escenarios donde participan fotones.
Aquí imaginamos un tren que se desplaza a velocidad constante v_o desde la estación-A hacia la estación-B. Se emiten fotones idénticos de frecuencia angular ω_o, 'N' hacia adelante y 'N' hacia atrás.

¿Qué observamos desde el referencial Σ' solidario al tren? Tenemos a un tren en reposo, y cada fotón emitido transporta cantidad de movimiento $\hbar.\omega_o/c$. Si solo hubiera emisión hacia adelante, el tren "*recularía*"; si solo hubiera emisión hacia atrás, habría un efecto de propulsión. Al suponer flujos simétricos, podemos estar seguros de que las cantidades de movimiento expulsadas hacia ambos lados son iguales. Por lo tanto la cantidad de movimiento del tren debe conservarse, mantiene su valor nulo. El tren continúa su reposo en ese referencial Σ', que correspondería a una velocidad constante v_o en el referencial Σ de tierra.

Desde el punto de vista de las estaciones, *los fotones tienen frecuencia diferente por efecto Doppler*.
→La estación-A mide una frecuencia menor porque ve al tren alejándose: $\omega_A = \omega_o.(1-v_o/c)$.
→La estación-B mide una frecuencia mayor porque ve al tren acercándose: $\omega_B = \omega_o.(1+v_o/c)$.

El balance de cantidad de movimiento es:

$$\Delta p = N.\hbar.\omega_B/c - N.\hbar.\omega_A/c = N.\hbar.\omega_o/c.[(1+v_o/c) - (1-v_o/c)]$$
$$\Delta p = N.\hbar.\omega_o/c.[2v_o/c]$$
$$\Delta p = 2N.\hbar.\omega_o/c^2.v_o$$

Reconocemos que $E=2N.\hbar.\omega_o$ es la energía de los '2N' fotones, $\hbar.\omega_o$ cada uno de ellos.
Re-escribimos:

$$\Delta p = E/c^2.v_o$$

La conservación del momento también tiene que cumplirse en este referencial Σ. De ese se trata el Principio de Relatividad: leyes físicas con validez universal frente a cualquier cambio de referencia.
Esta ley de conservación manda que el tren tiene que haber perdido una cantidad de movimiento igual a ese valor de Δp. Pero como no perdió velocidad porque mantiene su mismo valor v_o, y también su mismo factor de Lorentz $\gamma(v_o)$→ ¡*tiene que haber perdido una cantidad de masa ΔM*!
Igualamos $\Delta p = \Delta M.v_o$ y llegamos a $\Delta M = E/c^2$, $E=\Delta M.c^2$.
Toda la energía 'E', que fue liberada con los fotones, formaba parte de la "masa en reposo" del tren.
A igual velocidad, el tren ahora lleva menos impulso que antes porque tuvo esa pérdida.

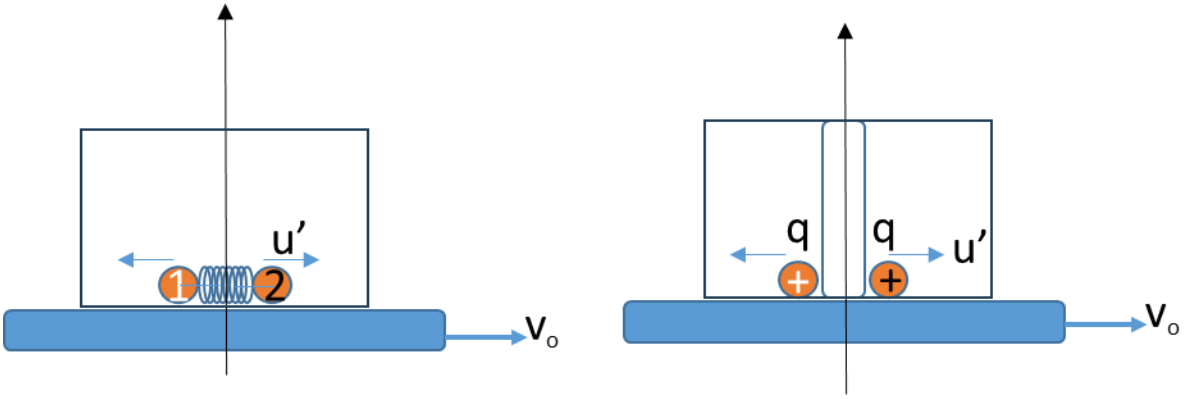
Aclaración: Estuvimos utilizando la aproximación clásica del efecto Doppler, válida para $v_o \ll c$.
Si el tren viajara a velocidades relativistas, deberíamos utilizar las correcciones por factor γ, aplicando la transformación de Lorentz a los cuadrivectores de onda.
A los efectos de este experimento no es relevante que el tren se mueva rápido. El efecto relativista ya se nota porque las partículas emitidas son fotones que viajan a velocidad 'c'.

5.3.4 Taquiones:

Se le da el nombre de taquión a una partícula hipotética que viaja con velocidad mayor a la velocidad de la luz, u>c. Los razonamientos de la sección 4.4.3 muestran que cualquier velocidad u>c abre las puertas hacia la posibilidad de enviar mensajes hacia atrás en el tiempo y tambalear las relaciones lógicas causa-efecto.
Si existieran partículas con estas propiedades, representarían un desafío a la Física.
Su factor γ_u es complejo y eso repercute en otras varias magnitudes, haciendo difícil su interpretación física.
El modelado de estos hipotéticos taquiones es de una complejidad que escapa al objetivo de este documento.
Solo nos vamos a limitar a enunciar lo siguiente: "*Podrán algún día producirse taquiones por procesos químicos, nucleares o cuánticos –hasta el presente desconocidos-, pero no por medios puramente mecánicos*". Una aceleración gradual por tiempo indefinido no va a convertir a una partícula normal en taquión; durante el proceso la masa relativista 'm' crece hasta el infinito y con ello crece su inercia o su oposición a adquirir mayor velocidad. De alguna manera la Física parece *protegerse* contra la posibilidad de ingresar a un régimen energético donde ciertas cantidades sean complejas en lugar de reales.

5.3.5 Energía potencial:

Veremos ejemplos donde otras energías (por ejemplo energía potencial) también verifican $E=mc^2$.
Consideramos una plataforma móvil que viaja a velocidad perfectamente constante $v_o \vec{} = v_o.\hat{x}$, y llamamos Σ' al sistema de referencia que la acompaña en forma solidaria.



Allí realizamos experimentos unidimensionales donde hacemos oscilar dos masas idénticas en forma simétrica alrededor del origen x'=0, tal que en cada instante t' tenemos $x'_1(t') = -x'_2(t')$ y $u'_1(t') = -u'_2(t')$.
Con esta configuración simétrica aseguramos que la cantidad de movimiento se conserva en Σ', va a ser nula en todo momento.

¿Cómo se ve la situación en Σ? La cantidad de movimiento esperada es

$$p_x(t) = m_0.\gamma_1.u_1(t) + m_0.\gamma_2.u_2(t)$$

Suponemos que todas las velocidades involucradas van a ser bajas, para poder aproximar por Taylor los factores gamma cinemáticos.

$$p_x \approx m_0.(1+ \tfrac{1}{2}\, u_1^2/c^2).u_1 + m_0.(1+ \tfrac{1}{2}\, u_1^2/c^2).u_2$$

$$p_x \approx m_0.(u_1+u_2) + \tfrac{1}{2}\, m_0.(u_1^3+u_2^3)\, /c^2 \approx \text{(Term-A)} + \text{(Term-B)}$$

Para el primer término (verde) aplicamos la adición relativista de velocidades, con $u'_2 = u'$ y $u'_1 = -u'$.
Advertencia: El tiempo 't' en que evaluamos u_1 y u_2 no corresponde a iguales valores t', por lo tanto no está asegurada la simetría. Para que esta pérdida de simultaneidad no induzca un error significativo es necesario el requerimiento de que los desplazamientos x' sean muy chicos en módulo.

(Term-A) $= m_o.(v_o-u')/(1-v_o\, u'/c^2) + m_o.(v_o+u')/(1+v_o\, u'/c^2)$ →aprox para $v_o \ll c$, $u' \ll c$

$= m_o.(v_o-u')(1+v_o\, u'/c^2) + m_o.(v_o+u')(1-v_o\, u'/c^2)$

$= m_o(v_o-u') + m_o v_o u'/c^2(v_o-u') + m_o(v_o+u') - m_o v_o u'/c^2(v_o+u')$

$= 2m_o v_o + m_o v_o u'/c^2(v_o-u') - m_o v_o u'/c^2(v_o+u')$

$= 2m_o v_o + m_o v_o u'/c^2(v_o-u') - m_o v_o u'/c^2(v_o+u')$

$= 2m_o v_o - 2m_o v_o u'^2/c^2$

$= 2m_o v_o(1-u'^2/c^2)$

Para el segundo término (celeste) nos alcanza con los numeradores para llegar al orden 3 deseado, no es necesario expandir por Taylor los denominadores porque aportarían correcciones infinitesimales.

(Term-B) $= \tfrac{1}{2}\, m_o/c^2(u_1^3+u_2^3)$ →aprox $u_1 \approx v_o-u'$, $u_2 \approx v_o+u'$

$\approx \tfrac{1}{2}\, m_o/c^2(v_o^3 - 3u'v_o^2 + 3u'^2 v_o - u'^3 + v_o^3 + 3u'v_o^2 + 3u'^2 v_o + u'^3)$

$\approx m_o/c^2(v_o^3 + 3v_o u'^2)$

$\approx m_o v_o\,(v_o^2/c^2 + 3u'^2/c^2)$

Combinamos ambos términos:

$$p_x \approx \text{(Term-A)} + \text{(Term-B)}$$

$$p_x \approx 2m_o v_o(1-u'^2/c^2) + m_o v_o\,(v_o^2/c^2 + 3u'^2/c^2)$$

$$p_x \approx m_o v_o(\, 2 - 2u'^2/c^2 + v_o^2/c^2 + 3u'^2/c^2)$$

$$p_x \approx m_o v_o(\, 2 \; + v_o^2/c^2 + u'^2/c^2)$$

$$p_x \approx 2m_o v_o(\, 1 \; + \tfrac{1}{2}\, v_o^2/c^2 + \tfrac{1}{2}\, u'^2/c^2)$$

Para infinitésimos $\epsilon \ll 1$ $\delta \ll 1$ es válido aproximar $(1+\epsilon+\delta) \approx (1+\epsilon)(1+\delta)$

$p_x \approx 2m_o v_o(1 + \frac{1}{2} v_o^2/c^2)(1+ \frac{1}{2} u'^2/c^2)$ →reconocemos el factor gamma de Lorentz

$p_x \approx 2m_o v_o \gamma.(1+ \frac{1}{2} u'^2/c^2)$

$p_x \approx 2m_o v_o \gamma.(\mathbf{1+ \frac{1}{2} u'^2/c^2})$

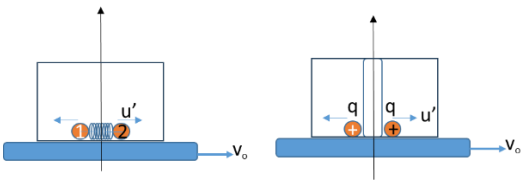
El factor marcado en rojo produce una fluctuación en la cantidad de movimiento.

Fluctuación inaceptable porque esperamos que se debería conservar a lo largo del tiempo, ya que el sistema no está recibiendo acción externa por ninguna vía.

Veremos cómo podemos corregir nuestro concepto de cantidad de movimiento para encontrar una cantidad que sí se conserva a pesar de las fluctuaciones en velocidad u'.

Usando argumentos clásicos en Σ', la conservación de la energía dice que $\mathbf{U'_{pot} + \frac{1}{2} m_o u'^2/c^2} = E'$ constante.

U'_{pot} es la energía potencial a la que está sometida cada una de las masas, y varía a lo largo de la coordenada horizontal x' para poder producir un movimiento oscilatorio.



Puede ser de origen elástico, si las masas se acercan inicialmente mediante un resorte comprimido, y luego se suelta el resorte para comenzar la oscilación.

También puede ser de origen electrostático, si las masas están cargadas con igual signo (+q) y son repelidas por acción electrostática. Luego rebotan elásticamente en las paredes del vehículo viajero y vuelven a acercarse, para repetir un nuevo ciclo de oscilación.

La corrección que estamos necesitando la podemos visualizar repitiendo los cálculos anteriores de cantidad de movimiento, pero utilizando no la masa propia 'm_o' de las partículas sino una masa efectiva m_{eff}:

$p_x \approx 2m_{eff} v_o \gamma(1+ \frac{1}{2} u'^2/c^2)$ $\quad m_{eff} = m_o + \Delta m = m_o + U'_{pot}/c^2$

$\Delta m = U'pot/c^2$ actúa como incremento de masa efectivo, que modula la inercia (la resistencia de la partícula a ser acelerada) y modifica el impulso que transmite la masa cuando impacta contra otros objetos.

Con esta corrección tenemos:

$p_x \approx 2(m_o + U'_{pot}/c^2) v_o \gamma(1+ \frac{1}{2} u'^2/c^2)$

$p_x \approx 2\, m_o\, [1+ U'_{pot}/(m_o c^2)] v_o \gamma(1+ \frac{1}{2} u'^2/c^2)$

$p_x \approx 2\, v_o \gamma\, m_o\, [1+ U'_{pot}/(m_o c^2)]\, (1+ \frac{1}{2} u'^2/c^2)$ →aprox $(1+\epsilon)(1+\delta) \approx (1+\epsilon+\delta)$

$p_x \approx 2\, v_o \gamma\, m_o\, [1+ U'_{pot}/(m_o c^2) + \frac{1}{2} u'^2/c^2]$

$p_x \approx 2\, v_o \gamma\, m_o\, [1+ \mathbf{(U'_{pot} + \frac{1}{2} m_o u'^2)} /(m_o c^2)]$ → **potencial + cinética = E' total conservada**

$p_x \approx 2\, v_o \gamma\, m_o\, [1+ \mathbf{(E')} /(m_o c^2)]$

$p_x \approx 2\, v_o \gamma\, [m_o + \mathbf{(E')}/c^2]$

Esta cantidad de movimiento, con la masa corregida de esta manera, sí se conserva.

En el capítulo 10, dentro del tema "Tensor de Energía-Impulso", analizaremos sólidos y fluidos presurizados. Veremos que cuando se mueven, la cantidad de movimiento también precisa un ajuste para lograr plena compatibilidad relativista.

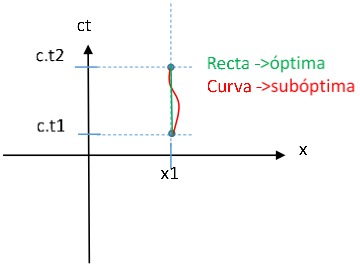
5.4 Principios variacionales, formulación lagrangeana.

En esta sección mostraremos un enfoque diferente de la Mecánica Relativista, poniendo énfasis en su relación con la métrica de Minkowski definida en el capítulo 4.5 y dándole una interpretación a las trayectorias de distancia mínima en este espacio-tiempo de 4 dimensiones. Este enfoque variacional cobrará mayor importancia en los capítulos de Relatividad General.
Consideramos dos eventos del espacio-tiempo dados por sus coordenadas:

$(c.t_1, x_1\ y_1\ z_1)$ $(c.t_2, x_2\ y_2\ z_2)$

5.4.1 Partícula libre en reposo:

Fijamos en un principio $x_2=x_1$ →porque queremos comenzar estudiando el caso particular en que ambos eventos ocurren en el mismo lugar, comparten la coordenada espacial $x=x_1$.



Las coordenadas (y,z) se mantienen constantes, no participan de este análisis y no se dibujan.
Consideramos también que una partícula material va a ser protagonista o participante de ambos eventos.
Va a estar en el punto x_1 en el instante t_1 y en el mismo punto x_1 en el instante t_2.

La Mecánica Clásica de Newton y Galileo nos dice que, en ausencia de perturbaciones externas, la partícula va a "*elegir*" la trayectoria recta (verde en la figura) frente a otra alternativa curva (roja en la figura). Nos proponemos demostrar que esta *elección* puede interpretarse como el resultado de un proceso matemático de optimización. Similar al que se aplicaría en un espacio 3D para calcular la trayectoria de un rayo de luz, que resulta ser la recta que minimiza la distancia recorrida.
Aquí tenemos un espaciotiempo 4D y una métrica cuadridimensional $(dS)^2 = (dx)^2+(dy)^2+(dz)^2 - c^2(dt)^2$, nos planteamos la idea de buscar el camino más corto entre ambos eventos: *más corto en el sentido de que minimice esta métrica 4D*.
Y compararlo con la trayectoria que describiría la partícula en ausencia de perturbaciones externas.

Si los diferenciales de desplazamiento forman parte de la trayectoria de una partícula material, podemos expresar todo en función de 'dt' sustituyendo $dx=u_x.dt$, $dy=u_y.dt$, $dz=u_z.dt$

$$(dS)^2 = (dt)^2 . (u_x^2+u_y^2+u_z^2-c^2)$$
$$(dS)^2 = (dt)^2 . (u^2-c^2)$$
$$(dS)^2 = - c^2(dt)^2 . (1-u^2/c^2)$$

En el caso de métricas "normales" estaríamos tentados de calcular $dS=\sqrt{dS^2}$ para luego minimizarla.

Aquí el problema es que las partículas no pueden moverse a velocidad mayor a 'c', nos encontramos con que $(dS)^2$ es negativo. No podemos calcular la raíz cuadrada porque nos daría compleja imaginaria.

Lo que sí podemos es negar el radicando, calcular $\sqrt{-dS^2}$ y luego maximizar en vez de minimizar.

No es lo mismo pero al menos el resultado va a ser un número real y puede admitir una interpretación.

Anticipo: Veremos pronto que la suerte nos favorece, porque las herramientas del Cálculo Variacional que permiten calcular las trayectorias resuelven un problema de *extremo*, aplicable tanto para máximos como para mínimos.

$$- (dS)^2 = c^2(dt)^2 . (1-u^2/c^2)$$
$$\sqrt{-(dS)^2} = c.dt.\sqrt{1-u^2/c^2}$$
$$\sqrt{-(dS)^2} = c.dt/\gamma_u \quad \rightarrow \text{reconocemos el diferencial de tiempo propio } d\tau=dt/\gamma_u$$

$\sqrt{-(dS)^2} = c.d\tau$

Formulamos entonces la siguiente conjetura:

Las trayectorias *libres* de las partículas son aquellas que maximizan el tiempo propio.

En este ejemplo consideramos el evento de partida y el de llegada con la misma coordenada $x_2=x_1$.
De acuerdo con la Mecánica Clásica hay un candidato a camino óptimo, y es que la partícula se quede quieta manteniendo su posición constante en todo momento $x(t)=x_1\ \forall t$.
La trayectoria se ve como una recta en el diagrama x-ct.
El tiempo propio de esa configuración coincide con el intervalo de tiempo coordenado $\tau = t_2-t_1$.

Cualquier otra configuración diferente del reposo implica que la partícula se va a mover hacia un lado, por ejemplo $u>0$, y luego se tendrá que mover en el sentido opuesto ($u<0$) para volver al punto de partida.
Tanto para los tramos $u>0$ como para los intervalos $u<0$ el factor $\sqrt{1-u^2/c^2}$ es menor a la unidad porque lo que influye es el cuadrado u^2 que siempre es positivo.

$\tau = \int_{t\in[t1,t2]} \sqrt{1-u^2(t)/c^2}\ dt \quad \rightarrow \quad \tau < t_2-t_1$ si $u(t)\neq 0$ para algún $t\in[t_1,t_2]$

En virtud del efecto de dilatación temporal, estas otras configuraciones cumplen siempre que el tiempo propio transcurrido es menor al intervalo de tiempo coordenado. Todas dan $\tau < t_2-t_1$.
Al menos en este escenario parece que se cumple la conjetura:

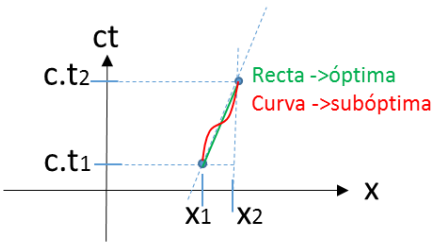
- La recta en el espacio x-ct es el camino óptimo que maximiza 'τ'
- Cualquier curva en el espacio x-ct es un camino sub-óptimo que produce un menor valor de 'τ'

5.4.2 Partícula libre en movimiento rectilíneo uniforme:

En este nuevo escenario los eventos de partida y llegada son:

$(c.t_1, x_1)$ $(c.t_2, x_2)$

Ahora liberamos la restricción de que x_2 sea igual a x_1: el evento de partida y el de llegada ocurren en diferente coordenada espacial. Solo exigimos que el trayecto se pueda recorrer a velocidad menor a la de la luz, para que existan soluciones físicamente aceptables.



La línea recta en el espacio-tiempo corresponde a una trayectoria en la que la partícula se desplaza a velocidad uniforme $u=v_o=(x_2-x_1)/(t_2-t_1)$. ¿Es esa la configuración que maximiza el tiempo propio?
Demostración simple: El tiempo propio es un invariante, así que para maximizarlo podemos situarnos en el sistema de referencia que mejor nos convenga. En este caso analizamos el problema desde un referencial Σ' que se mueve a velocidad $v_o=(x_2-x_1)/(t_2-t_1)$ respecto a Σ.
En ese referencial Σ' el evento de partida y el de llegada tienen la misma coordenada espacial x'_1, y estamos igual que en el caso anterior. → La trayectoria que maximiza el tiempo propio es la que tiene $u'=0\ \forall t'$.
Volviendo al referencial Σ, esto significa que la partícula deberá moverse con velocidad rectilínea uniforme.

Esta formulación muestra desde otra óptica las leyes más básicas de la Mecánica:

- En ausencia de perturbaciones externas, un cuerpo en reposo tiende a mantener el estado de reposo.
- Y si se está moviendo, tiende a mantener su estado de movimiento que será rectilíneo uniforme.

5.4.3 Integral de acción:

En la Mecánica Clásica se define la integral de acción como:

$$\text{Acc} = \mathcal{S} = \int_t \mathcal{L}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t).dt$$

El integrando $\mathcal{L}$ (Lagrangeano o Lagrangiano) tiene unidades de energía y la acción tiene unidades de energía$_x$tiempo. El Principio de Mínima Acción afirma que las trayectorias más probables en la Naturaleza son las que minimizan esta cantidad. Y esa condición de extremo $\delta\mathcal{S} = 0$ se calcula resolviendo las ecuaciones variacionales de Euler-Lagrange (para cada coordenada-x):

$$P_x = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} \qquad dP_x/dt - \partial\mathcal{L}/\partial x = f_x$$

Curiosidad matemática: Estrictamente, la solución de estas ecuaciones no asegura una acción mínima sino estacionaria con $\delta\mathcal{S}=0$. Las funciones que resultan de resolver estas ecuaciones producen una acción que se mantiene, a primer orden, estable frente a pequeñas perturbaciones $x(t)=x_{solución}(t) + \delta x(t)$.
Este detalle permite aplicar las herramientas matemáticas por igual a los problemas de maximización que a los problemas de minimización, y está relacionado al hecho de que podamos maximizar el tiempo propio valiéndonos de estos mismos recursos.

Identificamos:

- $\dot{x}=dx/dt$, componente-x de la velocidad
- $P_x=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}$ se llama momento lagrangeano de la coordenada-x.
- f_x es la fuerza perturbadora asociada a la dirección-x. Acabamos de analizar en 5.4.2 el caso de partículas libres donde valía $f_x=0$; esta sección se propone generalizar el resultado para $f_x \neq 0$.

En Relatividad Especial estamos vislumbrando una posibilidad de extremar el tiempo propio 'τ'.
Para que nos queden unidades de acción debemos agregar factores de masa y velocidad de la luz al cuadrado (recordemos que $m_o.c^2$ tiene unidades de energía, "energía de reposo"). También se requiere un ajuste de signo, ya que la acción debe minimizarse al revés del tiempo propio que se maximiza.
Una premisa importante es que el Lagrangeano sea invariante, lo que implica que la masa por la que multiplicamos para ajustar la escala debe ser la masa propia invariante de la partícula m_o.

→Proponemos la siguiente Acción Relativista $S = -m_o.c^2\int d\tau = \int_t \mathcal{L}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t).dt$

Con $\mathcal{L} = -m_o.c^2.\sqrt{1 - u^2/c^2} = -m_o.c^2.\sqrt{1 - (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)/c^2}$

En el límite de las bajas velocidades $u \ll c \rightarrow \sqrt{1 - u^2/c^2} \approx 1 - \frac{1}{2}.u^2/c^2$

Nos queda un Lagrangeano aproximadamente igual al clásico: $\mathcal{L} \approx \frac{1}{2}.m_o.u^2 - m_o.c^2$
Recordemos que el Lagrangeano clásico era $\mathcal{L}=E_{cinet}-U_{pot}$, por ahora lo más que nos podemos aproximar al potencial es un término constante $U_{pot} \approx m_o.c^2$; pero anticipamos que pronto va a aparecer en Relatividad un potencial variable con la posición y va a armonizar con este esquema. Se trata de sumar un término que involucra u_{pot}=potencial por unidad de masa, acompañando (con signo opuesto) al factor $u^2/2$ que es energía cinética por unidad de masa.

$$\mathcal{L} = -m_o.c^2.\sqrt{1 - u^2/c^2} = -m_o.c^2.\sqrt{1 - (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)/c^2}$$

El momento asociado a la coordenada x queda:

$$P_x = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}$$
$$P_x = -m_o.c^2/(2.\sqrt{\ })(-2\dot{x}/c^2)$$
$$P_x = m_o.\dot{x}/\sqrt{\ } \qquad \rightarrow \text{Reconocemos el factor gamma } \gamma_u=1/\sqrt{\ }$$
$$P_x = m_o.\gamma_u.\dot{x}$$

$\dot{x}=dx/dt$ es lo que llamamos u_x en la sección anterior, componente-x de la velocidad.
Comprobamos que los momentos lagrangeanos coinciden con la cantidad de movimiento relativista y contienen el factor gamma γ_u que habíamos encontrado antes en la sección 5.2.1.

Resolver las trayectorias incógnitas consiste en minimizar la integral de acción bajo ciertas restricciones.
En cada dimensión las condiciones de borde imponen una restricción con forma integral:
$\int \dot{x}(t)dt = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1$.
Salvo casos muy simples que admiten solución *artesanal*, el caso general obliga a recurrir al *Cálculo Variacional* y resolver las llamadas Ecuaciones de Euler-Lagrange.

$dP_x/dt - \partial_x \mathcal{L} = f_x$ $dP_y/dt - \partial_y \mathcal{L} = f_y$ $dP_z/dt - \partial_z \mathcal{L} = f_z$

Repetimos que estas ecuaciones no apuntan a resolver un mínimo absoluto sino un extremo local, una acción que se mantiene estable a primer orden frente a pequeñas perturbaciones $x(t)=x_{soluc}(t) + \delta x(t)$.

Ejercicio: Repasar en algún texto de Física Clásica los cálculos matemáticos que imponen la condición de acción estacionaria $\delta\mathcal{S}=0$ y que conducen a las Ecuaciones de Lagrange.
Guía: Plantear $\mathcal{S}=\int\mathcal{L}(x^h,\dot{x}^h,t).dt$, calcular variaciones siguiendo las reglas usuales de la diferenciación $\delta\mathcal{S}=\int(\partial\mathcal{L}/\partial x^h\ \delta x^h+\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}^h\ \delta\dot{x}^h)dt$, tener presente la convención de la suma (suma en el índice 'h' que recorre todas las coordenadas), y finalmente integrar por partes reconociendo $\delta\dot{x}^h = d(\delta x^h)/dt$.

En ausencia de potenciales se anulan las derivadas espaciales del Lagrangeano, y las ecuaciones de Euler-Lagrange adquieren esta forma para cada coordenada:

$dP_x/dt = f_x$ $dP_y/dt = f_y$ $dP_z/dt = f_z$

Observación: Se complementa así lo que mencionamos en la sección 5.3.2 cuando dijimos que $\vec{f}=d\vec{p}/dt$ era una buena generalización relativista de la Ley de Newton, más conveniente que su alternativa $\vec{f}=m.\vec{a}$.
Advertencia: A pesar de habernos basado en la forma relativísticamente correcta de $\vec{p}$, estas 3 componentes de la fuerza $\vec{f}$ todavía no pueden formar parte de un buen cuadrivector relativista debido a que surgen de derivar respecto al tiempo coordenado 't'; les pasa lo mismo que pasaba con la velocidad coordenada $\vec{u}$.
La receta para obtener cuadrivectores con buen sentido relativista es la misma que ya vimos: derivar respecto al tiempo propio 'τ'. Esto lo abordamos en la siguiente sección.

5.4.4 Formulación del Lagrangeano en 'τ' :

Volvemos a la integral de acción $S = -m_o.c^2\int d\tau = -m_o.c\int c.d\tau$ pero ahora reescribimos el integrando.

$c.d\tau=\sqrt{(c.dt)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2} = d\tau.\sqrt{(c.dt/d\tau)^2-(dx/d\tau)^2-(dy/d\tau)^2-(dz/d\tau)^2}$

$d\tau = d\tau.\sqrt{\dot{t}^2-\dot{x}^2/c^2-\dot{y}^2/c^2-\dot{z}^2/c^2}$

En esta nueva formulación, la raíz vale 1 (ya no contiene más al factor de dilatación temporal γ_u)
Este factor γ_u no desaparece, está presente bajo la forma de $\gamma_u = \dot{t} = dt/d\tau$.
El punto encima de las coordenadas pasa a significar "derivada respecto al tiempo propio".

$\dot{t} = dt/d\tau$ $\dot{x} = dx/d\tau$ $\dot{y} = dy/d\tau$ $\dot{z} = dz/d\tau$

La acción pasa a ser una integral en la variable 'τ', y el Lagrangeano en 'τ' queda:

$$\mathcal{L}(ct,x,y,z,c\dot{t},\dot{x},\dot{y},\dot{z},\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2-\dot{x}^2/c^2-\dot{y}^2/c^2-\dot{z}^2/c^2}$$

Los momentos en las coordenadas espaciales quedan todos parecidos, alcanza con el ejemplo de 'x':
$P_x = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} = -m_o.c^2/(2.\sqrt{\ }).(-2\dot{x}/c^2) = m_o/\sqrt{\ }.\dot{x}$
Ahora vale $\sqrt{\ }=1$, lo que nos lleva a

$P_x = m_o.\dot{x}$ $P_y = m_o.\dot{y}$ $P_z = m_o.\dot{z}$

El factor γ_u está camuflado o contenido en las componentes de la velocidad propia $\dot{x}=u_x.\dot{t}=u_x.\gamma_u$.

Esta formulación 5.4.4 conduce a los mismos resultados que 5.4.3, pero es incompatible con la anterior en cuanto al cambio de notación: ahora el punto representa derivadas respecto a 'τ'.
Hay que tener precaución de aclarar siempre el significado del punto, para evitar ambigüedades.

En este sentido ayuda escribir en forma explícita las variables de las que depende el Lagrangeano.

→ $\mathcal{L}$ (x,y,z,ẋ,ẏ,ż,t) El 't' al final significa que la acción se integra en 't'
y que las coordenadas se derivan respecto a 't' (ẋ=dx/dt)
Estaríamos en la formulación clásica, 3D

→$\mathcal{L}$ (ct,x,y,z,cẗ,ẋ,ẏ,ż,τ) El 'τ' al final significa que la acción se integra en 'τ'
y que las coordenadas aparecen derivadas respecto a τ: ẋ=dx/dτ
Estaríamos en la formulación relativista, 4D

La presencia del ṫ=dt/dτ debería darnos la pista de que estamos frente a la formulación 'τ', más todavía si va escalado por la velocidad de la luz como "c.ṫ": utilizar 'ct' como cuarta coordenada a las par de las coordenadas espaciales es algo típicamente relativista.

Las ecuaciones de Lagrange también se modifican y pasan a ser:

$dP_x/d\tau - \partial\mathcal{L}/\partial x = F_x$ $dP_y/d\tau - \partial\mathcal{L}/\partial y = F_y$ $dP_z/d\tau - \partial\mathcal{L}/\partial z = F_z$

Las fuerzas ahora van en mayúscula y representan componentes de la cuadrifuerza relativista, a diferencia de antes que las poníamos con minúscula y representaban la fuerza clásica. La relación entre ambas es simplemente un factor γ_u.

$F_x = \gamma_u f_x$ $F_y = \gamma_u f_y$ $F_z = \gamma_u f_z$

En esta nueva formulación también podemos calcular un "momento asociado a la coordenada ct".

$P_{ct} = \partial\mathcal{L}/\partial(c\dot{t}) = 1/c.\ \partial\mathcal{L}/\partial\dot{t} = -1/c.\ m_o.c^2/(2.\sqrt{\ }).2\dot{t} = -m_o.c/\sqrt{\ }.\dot{t} = -m_o.c.\dot{t}$

$P_{ct} = -m_o.c.\dot{t} = -m_o.c.\gamma_u$

¿Qué interpretación tiene este momento temporal? Es la coordenada-0 del cuadri-momento o cuadrivector energía-impulso: $P^\alpha=(E/c\ ,\ \vec{p})$.
La única *rareza* es el signo negativo, pero eso es porque lo estamos viendo en versión covariante.
$P_\alpha=(-E/c\ ,\ \vec{p})$
→Los momentos que aparecen en las ecuaciones de Lagrange son momentos covariantes.

La ecuación tensorial correcta es $F_\alpha + \partial_\alpha\mathcal{L} = dP_\alpha/d\tau$.

La cuadrifuerza relativísticamente correcta es $F_\alpha=(-\gamma_u\dot{W}/c,\gamma_u\vec{f})$

$F^\alpha=(\gamma_u\dot{W}/c,\gamma_u\vec{f})$

5.5 Fuerza de Lorentz relativista.

Para complementar este capítulo de Mecánica Relativista nos proponemos estudiar la fuerza que actúa sobre partículas cargadas. En la Física Clásica aparece como Fuerza de Lorentz y responde a la expresión:

$$\vec{f}=q.(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$$

Haremos un desarrollo para apreciar cómo se puede incluir esta fuerza en el marco de los cuadrivectores relativistas y de la Mecánica Lagrangeana.

Partimos del Lagrangeano en 'τ', y simplificamos la notación abreviando al conjunto de coordenadas como X^h, con h=0,1,2,3. $\rightarrow \mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2 - \dot{x}^2/c^2 - \dot{y}^2/c^2 - \dot{z}^2/c^2}$

Nos proponemos extraer fuera de la raíz el factor gamma de Lorentz $\dot{t}^2=\gamma_u^2$ observando que está camuflado dentro de las velocidades propias: $\dot{x}=u_x.\dot{t}$, $\dot{y}=u_y.\dot{t}$, $\dot{z}=u_z.\dot{t}$.
u_x u_y u_z son las velocidades coordenadas que se utilizaban en Física Clásica.

$(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \gamma_u^2.(u_x^2+u_y^2+u_z^2)$	igualamos $\dot{t}=\gamma_u$
$(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \dot{t}^2.(u_x^2+u_y^2+u_z^2)$	→definimos u^2
$(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)/c^2 = \dot{t}^2.u^2/c^2$	→sustituimos en el Lagrangeano
$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2.\dot{t}.\sqrt{1-u^2/c^2}$	→Taylor para $u \ll c$
$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) \approx -m_o.c^2.\dot{t}.(1-\frac{1}{2}\,u^2/c^2)$	→expandimos
$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) \approx -m_o.c^2.\dot{t} + \frac{1}{2}\,m_o\dot{t}.u^2/c^2$	→reordenamos
$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) \approx \frac{1}{2}\,m_o\dot{t}.u^2/c^2 - m_o\dot{t}.c^2$	

Podemos ignorar momentáneamente el factor $\dot{t}$, aproximadamente unitario en régimen de bajas velocidades.
O imaginarlo que se junta con la masa propia para formar una masa relativista $m=\dot{t}.m_o$.
Salvo ese detalle, lo que tenemos aquí es una estructura que recuerda al Lagrangeano clásico que restaba energía cinética menos potencial.
Nuestra formulación relativista todavía no contempla la presencia de potenciales.
Al momento de incorporarlos, podemos *conjeturar* que van a aparecer con signo opuesto a la energía cinética y con los mismos factores de escala, para obtener en el límite clásico las mismas ecuaciones de movimiento.

$$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) \approx \frac{1}{2}\,m_o\dot{t}.u^2/c^2 - m_o\dot{t}.c^2 - \dot{t}.U_{pot}$$

Deshacemos todas las aproximaciones de Taylor del Lagrangeano y reconstruimos la raíz, pero mantenemos el agregado nuevo fuera de la raíz.

$$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2 - \dot{x}^2/c^2 - \dot{y}^2/c^2 - \dot{z}^2/c^2} - \dot{t}.U_{pot}$$

Ahora el problema variacional no se correlaciona exactamente con la maximización del tiempo propio, sino más bien "maximización con las restricciones que impone un potencial externo".
Advertencia: Esto es apenas una conjetura, que solo podrá sostenerse mientras no contradiga ninguno de los resultados ya demostrados en este documento ni en otras ramas de la Física.

5.5.1 Energía potencial electrostática:

El potencial más simple que tenemos para empezar a trabajar es: $U_{pot}=q.\Phi$.
Φ=potencial electrostático del cual deriva el campo electrostático $\vec{E} = -\nabla\Phi$.
Suponemos por el momento que no hay ningún campo ni potencial magnético. $\vec{A}=\vec{0}$, $\vec{B}=\vec{0}$.
(*Ignoramos el campo que crearía la carga 'q' al moverse, la consideramos una carga de prueba muy chica*).
El Lagrangeano modificado queda, de acuerdo con nuestra conjetura:

$$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2 - \dot{x}^2/c^2 - \dot{y}^2/c^2 - \dot{z}^2/c^2} - \dot{t}.q.\Phi$$

Ese factor $\dot{t}$ puede dejar lugar a dudas, pero veremos enseguida que es necesario para construir a partir de esta aproximación clásica una ecuación relativísticamente correcta, con los índices bien balanceados.

Los momentos quedan: $P_x = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} = -m_o.c^2/(2.\sqrt{\ }) \,.\, (-2\dot{x})/c^2 = m_o/\sqrt{\ }.\dot{x}$

El término agregado fuera de la raíz no afecta la condición que venimos utilizando $\sqrt{\ }=1$.

Adelanto: En el capítulo de Relatividad General veremos que el potencial gravitacional *nos aparece adentro de la raíz*. Esto significa que *la presencia de potencial gravitatorio afecta al factor de dilatación temporal, igual que lo hace el hecho de moverse más rápido o más lento*.

Los momentos nos quedan igual que antes: $P_x=m_o.\dot{x}$.

Ahora adquiere protagonismo el término $\partial\mathcal{L}/\partial x$ de la ecuación de Lagrange.

$\partial\mathcal{L}/\partial x = -q.\dot{t}.\partial\Phi/\partial x$ reconocemos $\vec{E} = -\nabla\Phi$

$\partial\mathcal{L}/\partial x = q.\dot{t}.E_x$

La ecuación de Lagrange en la coordenada-x queda:

$dP_x/d\tau - \partial\mathcal{L}/\partial x = F_x$

$dP_x/d\tau = \partial\mathcal{L}/\partial x + F_x$

$m_o.d\dot{x}/d\tau = q.\dot{t}.E_x + F_x$ = fuerza eléctrica + otras fuerzas de origen no-eléctrico

La conjetura del Lagrangeano modificado hasta ahora no produce ninguna inconsistencia detectable. Permite reencontrar la fuerza de Lorentz eléctrica, con el factor $\dot{t}=\gamma_u$ *omnipresente* en tantas expresiones de la Relatividad Especial ($d/d\tau=\dot{t}.d/dt$, $F_x=\dot{t}.f_x$).

5.5.2 Potenciales eléctricos y magnéticos:

Para simplificar los cálculos habíamos supuesto inicialmente $\vec{A}=\vec{0}$ y $\vec{B}=\vec{0}$.

Existe un recurso para vislumbrar cómo quedaría el Lagrangeano modificado en presencia de campos magnéticos: el truco consiste en movernos con velocidad $\vec{v_o}$ hacia un referencial Σ' en el cual las cargas eléctricas causantes del $\vec{E}$ se verán móviles, como corrientes, y tendrán un campo magnético asociado. Aunque estrictamente solo estaríamos considerando *corrientes de arrastre o transporte*, confiamos en que los detalles matemáticos serán extensibles a las *corrientes óhmicas* de conducción.

El Lagrangeano debería ser un invariante relativista que resiste cambios de variables de Σ a Σ', por lo tanto esperamos $\mathcal{L}=\mathcal{L}'$. Por la parte que depende del tiempo propio τ no nos preocupamos, ya sabemos que τ es invariante. Concentramos la atención en la parte nueva.

$$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}^2 - \dot{x}^2/c^2 - \dot{y}^2/c^2 - \dot{z}^2/c^2} - \dot{t}.q.\Phi$$

Expresamos las coordenadas $c\dot{t}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ en función de sus correspondientes $c\dot{t}'$, $\dot{x}'$, $\dot{y}'$,$\dot{z}'$ relacionadas a través de una transformación de Lorentz con factor $\gamma_o=1/\sqrt{1-v_o^2/c^2}$

$\dot{t} = \gamma_o.(\dot{t}'+v_o/c^2.\dot{x}')$ $\rightarrow \dot{t}^2= \gamma_o^2.(\dot{t}'^2+2.v_o/c^2.\dot{t}'.\dot{x}' + v_o^2/c^4.\dot{x}'^2)$

$\dot{x} = \gamma_o.(\dot{x}'+ v_o.\dot{t}')$ $\rightarrow \dot{x}^2=\gamma_o^2.(\dot{x}'^2+2.v_o.\dot{x}'.\dot{t}' + v_o^2.\dot{t}'^2)$

$\dot{y} = \dot{y}'$

$\dot{z} = \dot{z}'$

Sustituimos y operamos. Desaparecen los términos mixtos $\dot{t}'.\dot{x}'$ y queda:

$$\mathcal{L}'(X'^h,\dot{X}'^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}'^2 - \dot{x}'^2/c^2 - \dot{y}'^2/c^2 - \dot{z}'^2/c^2} - q.\gamma_o.(\dot{t}'+v_o/c^2.\dot{x}').\Phi$$

$$\mathcal{L}'(X'^h,\dot{X}'^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}'^2 - \dot{x}'^2/c^2 - \dot{y}'^2/c^2 - \dot{z}'^2/c^2} - q.\gamma_o.\Phi.\dot{t}' - q.\gamma_o.\Phi.v_o/c^2.\dot{x}'$$

En paralelo con los cálculos de coordenadas y velocidades precisamos aplicar la transformación de Lorentz para el cuadrivector potencial, para poder sustituir $\Phi,\vec{A}$ en función de sus correspondientes $\Phi',\vec{A}'$.

$\Phi' = \gamma_o.(\Phi - v_o.A_x) = \gamma_o.\Phi$ por ser $\vec{A}=0$

$A'_x = \gamma_o.(A_x - v_o/c^2.\Phi) = -\gamma_o.v_o/c^2.\Phi$ por ser $\vec{A}=0$

El Lagrangeano en Σ' queda:

$$\mathcal{L}'(X'^h,\dot{X}'^h,\tau) - m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}'^2 - \dot{x}'^2/c^2 - \dot{y}'^2/c^2 - \dot{z}'^2/c^2} - q.\Phi'.\dot{t}' + q.A'_x.\dot{x}'$$

Ahora ya podemos *adivinar* la forma en que se manifiestan los efectos magnéticos. En este problema simplificado son nulos los componentes $A'_y=A'_z=0$, pero si fueran no nulos deberían aparecer emparejados con A'_x completando un producto escalar de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}'(X'^h,\dot{X}'^h,\tau) - m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}'^2 - \dot{x}'^2/c^2 - \dot{y}'^2/c^2 - \dot{z}'^2/c^2} + q.(-\Phi'.\dot{t}' + A'_x.\dot{x}' + A'_y.\dot{y}' + A'_z.\dot{z}')$$

Separamos en dos partes, cinética y potencial:

$$\mathcal{L}'(X'^h,\dot{X}'^h,\tau) - m_o.c^2.\sqrt{\dot{t}'^2 - \dot{x}'^2/c^2 - \dot{y}'^2/c^2 - \dot{z}'^2/c^2} + q.(-\Phi'.\dot{t}' + A'_x.\dot{x}' + A'_y.\dot{y}' + A'_z.\dot{z}')$$

Ambas partes son invariantes, así que tanto da calcularlas en Σ como en Σ'.

La parte potencial involucra al producto escalar entre cuadrivectores $A_\alpha.U^\alpha$, que es invariante.

$U^\alpha = (c.\dot{t}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ cuadrivelocidad

$A^\alpha = (\Phi/c, A_x, A_y, A_z)$ cuadripotencial en versión contravariante

$A_\alpha = (-\Phi/c, A_x, A_y, A_z)$ cuadripotencial covariante, cambia el signo de la componente-0

$A_\alpha.U^\alpha = -\dot{t}.\Phi + \dot{x}.A_x + \dot{y}.A_y + \dot{z}.A_z$

En notación tensorial queda bien manifiesta la invarianza del Lagrangeano para partículas cargadas interactuando con campos electromagnéticos:

$$\mathcal{L}(X^h,\dot{X}^h,\tau) = -m_o.c^2.\sqrt{-U_\alpha U^\alpha/c^2} + q.A_\alpha U^\alpha$$

El "potencial dependiente de la velocidad $q.(\Phi - \vec{u}\cdot\vec{A})$" ya fue presentado en 2.1.4, lo escribíamos como $U_{pot} = -q.\langle \boldsymbol{A4}, \boldsymbol{U4}\rangle$ y ahora lo anotamos $-qA_\alpha U^\alpha$. Puede parecer raro a primera vista, ya que normalmente nos encontramos con potenciales que dependen solo de la posición. En el capítulo 15 ofrecemos algunas guías para poder interpretar el producto escalar $-q.\vec{u}\cdot\vec{A}$ como una energía potencial magnética.

5.5.3 Fuerzas electromagnéticas:

Ejercicio previo: Demostrar que $\partial(U_\alpha U^\alpha)/\partial\dot{X}^h = 2.U_h$

Sugerencia de demostración: $U_\alpha U^\alpha$ es una sumatoria de 4 términos desde α=0 hasta α=3 (con signo de Σ omitido por la convención de suma de Einstein). Al derivar respecto a la velocidad $U^h=\dot{X}^h$, solo el término α=h aporta algo no nulo.

Ejercicio similar: Demostrar que $\partial(A_\alpha U^\alpha)/\partial U^h = A_\alpha \partial(U^\alpha)/\partial U^h = A_\alpha \delta_{Kronecker}{}^\alpha{}_h = A_h$

Utilizamos los resultados del ejercicio recién planteado para calcular los momentos:

$P_h = \partial\mathcal{L}/\partial U^h = -m_o.c^2/(2.\sqrt{\ })[-2.U_h/c^2] + q\,\partial(A_\alpha U^\alpha)/U^\alpha$

$P_h = m_o.U_h + q.A_h$

El otro término de la ecuación de Lagrange queda:

$\partial\mathcal{L}/\partial X^h = [\, q.U^\alpha\, \partial A_\alpha/\partial X^h\,]$ →anotamos $\partial_h = \partial/\partial X^h$

$\partial\mathcal{L}/\partial X^h = q.U^\alpha.\partial_h A_\alpha$ (1)

Una dificultad sutil surge al querer calcular $dP_h/d\tau = m_o.dU_h/d\tau + q.dA_h/d\tau$

Estamos evaluando el cambio de los potenciales por unidad de tiempo propio de la partícula móvil.

Este cambio se produce por la eventual variación temporal en sí, ∂_t, pero también por la variación espacial ∇: la partícula se mueve hacia otras zonas donde los potenciales son diferentes.

Según la regla de la cadena, $d/d\tau = dX^\alpha/d\tau\ .\partial/\partial X^\alpha$ (suma desde α=0 hasta α=3)

$d/d\tau = \dot{X}^\alpha\partial_\alpha = U^\alpha\partial_\alpha$

Expandido resulta, salvo un factor γ_u, igual a $\partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$ que podría llamarse "derivada solidaria", "derivada acompañante" o "derivada direccional" en la dirección del movimiento.

De acuerdo con este concepto,

$$dP_h/d\tau = m_o.dU_h/d\tau + q.dA_h/d\tau$$

$$dP_h/d\tau = m_o.dU_h/d\tau + q.U^\alpha \partial_\alpha A_h \qquad (2)$$

La ecuación de Euler-Lagrange en la coordenada 'h' es:

$$dP_h/d\tau - \partial \mathcal{L} / \partial X^h = F_h$$

$$dP_h/d\tau = \partial \mathcal{L} / \partial X^h + F_h$$

Que combinando (1) y (2) resulta:

$$m_o.dU_h/d\tau + q.U^\alpha \partial_\alpha A_h = q.U^\alpha.\partial_h A_\alpha + F_h$$

$$m_o.dU_h/d\tau = q.U^\alpha.\partial_h A_\alpha - q.U^\alpha \partial_\alpha A_h + F_h$$

$$m_o.dU_h/d\tau = q.U^\alpha.(\partial_h A_\alpha - \partial_\alpha A_h) + F_h$$

$$m_o.dU_h/d\tau = q.F_{h\alpha}U^\alpha + F_h$$

Definimos una magnitud tensorial de 2 índices, ambos covariantes: $F_{h\alpha} = \partial_h A_\alpha - \partial_\alpha A_h$

Se llama Tensor de Campo Electromagnético y se anota con la letra F (de la palabra inglesa "*Field*").
Lamentablemente, la letra F también aparece en fuerza ("*force*"), y dentro de esta misma ecuación ☹.
No podemos inventar otra letra porque iríamos a contramano de la costumbre generalizada de utilizar la F.
Deberemos usar la misma letra F, con la precaución siguiente:

→si aparece con un solo índice, se refiere a fuerzas
→si aparece con 2 índices, se refiere al tensor de campo electromagnético

El tensor de campo recién definido nos permitirá expresar en forma tensorial las ecuaciones principales del Electromagnetismo, además de la fuerza de Lorentz.

5.6 Tensor de Campo Electromagnético.

Formalmente su definición es $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, con los 2 índices bajos.
Comenzaremos calculando los componentes de esta versión doblemente covariante.

5.6.1 Versión covariante $F_{\alpha\beta}$:

Debido a la simetría en que aparecen los índices, vemos inmediatamente la propiedad $F_{\beta\alpha} = -F_{\alpha\beta}\ \forall\alpha\ \forall\beta$.
Por otro lado, cuando $\alpha=\beta$ se cumple $F_{\alpha\beta}=0$.
Lo que tenemos es un tensor antisimétrico con ceros en la diagonal y solamente 6 celdas no triviales; ya que las celdas bajo la diagonal se deducen cambiando el signo de las que quedan sobre la diagonal.

→$\alpha=0$ $\beta=i$, con i=1,2,3.
$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0$ →sustituimos $A_o = -\Phi/c$, con signo cambiado por estar en versión covariante
$F_{0i} = 1/c\ \partial_t A_i + \partial_i(\Phi/c)$ →reconocemos $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial_t\vec{A}$ proyectado en la dirección-i
$F_{0i} = -E_i/c$
Por anti-simetría, $F_{i0} = +E_i/c$

→Por otro lado,
$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \partial_x A_y - \partial_y A_x = (\nabla\wedge\vec{A})$ proyectado según $\vec{z}$
$F_{12} = B_z \rightarrow F_{21} = -B_z$
$F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = \partial_y A_z - \partial_z A_y = (\nabla\wedge\vec{A})$ proyectado según $\vec{x}$
$F_{23} = B_x \rightarrow F_{32} = -B_x$
$F_{31} = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 = \partial_z A_x - \partial_x A_z = (\nabla\wedge\vec{A})$ proyectado según $\vec{y}$
$F_{31} = B_y \rightarrow F_{13} = -B_y$

El tensor completo resulta:
$[F_{\alpha\beta}]=$

[00	$-E_x/c$	$-E_y/c$	$-E_z/c$	]
$[+E_x/c$	00	$+B_z$	$-B_y$	]
$[+E_y/c$	$-B_z$	00	$+B_x$	]
$[+E_z/c$	$+B_y$	$-B_x$	00	]

La fuerza electromagnética de Lorentz es $L_\alpha = q.F_{\alpha\beta}U^\beta$, siendo $U^\beta = \gamma_u.(c,u_x,u_y,u_y)$
La visualización matricial es:

				$[c.q.\gamma_u]$	
				$[u_x.q.\gamma_u]$	
				$[u_y.q.\gamma_u]$	
				$[u_z.q.\gamma_u]$	
[00	-Ex/c	-Ey/c	-Ez/c	]	$=-q.\gamma_u.\vec{E}\dot{\vec{u}}$
[+Ex/c	00	+Bz	-By	]	$=q.\gamma_u.(E_x + u_y.B_z - u_z.B_y)$
[+Ey/c	-Bz	00	+Bx	]	$=q.\gamma_u.(E_y + u_z.B_x - u_x.B_z)$
[+Ez/c	+By	-Bx	00	]	$=q.\gamma_u.(E_z + u_x.B_y - u_y.B_x)$

Reconocemos $\vec{u}\wedge\vec{B}$ en sus tres componentes espaciales:
Según x→ $u_y.B_z - u_z.B_y$
Según y→ $u_z.B_x - u_x.B_z$
Según z→ $u_x.B_y - u_y.B_x$
O sea que la parte espacial de la cuadrifuerza de Lorentz es $q.\gamma_u.(\vec{E} + \vec{u}\wedge\vec{B})$
Es exactamente igual a la fuerza clásica, salvo el factor relativista γ_u necesario para la "bien-varianza".
Recordar que en 5.4.4 habíamos visto que la $\vec{f}$ clásica entraba como $\gamma_u.\vec{f}$ en la parte espacial de la cuadrifuerza relativista.
En la componente-0 del cuadrivector se reconoce $q.\vec{E}\cdot\vec{u} = \dot{W}$ = potencia clásica suministrada a la carga eléctrica. Solo influye el campo eléctrico, la fuerza magnética es de potencia nula y no aporta $\dot{W}$.
Entonces esta componente-0 del cuadrivector de Lorentz es $-\gamma_u.\dot{W}/c$

El signo de (–) se debe al carácter covariante.
La ecuación de la fuerza de Lorentz relativista es:
$m_o.dU_h/d\tau = q.F_{h\alpha}U^\alpha + F_h$ = fuerzas electromagnéticas + fuerzas de otro origen no electromagnético
Todos los sumandos, tanto a la izquierda como a la derecha, son de carácter covariante.
El tensor $F_{h\alpha}$ tiene sus 2 índices covariantes, luego el índice 'α' se compensa por U^α y desaparece al sumar →el resultado queda covariante de rango 1 con índice 'h', bien balanceado.
Observación: En el capítulo 2 habíamos adelantado que el producto escalar de vectores era un buen recurso para formular leyes de la Física invariantes. Ahora agregamos que las expresiones matriciales (tensoriales) también son útiles a esta formulación. Los tensores se irán volviendo progresivamente más importantes a medida que avancemos en la Teoría de la Relatividad.
Ejercicio: Recordar que las celdas de una matriz producto pueden interpretarse como producto escalar entre filas y columnas de las matrices que se están multiplicando. Todo está relacionado.

5.6.2 Versión contravariante $F^{\alpha\beta}$:

La definición cambia sutilmente: $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$
La parte magnética da el mismo resultado, porque al variar α y β en el rango 1..3 $\partial^\alpha=\partial_\alpha$ y $A_\alpha=A^\alpha$
Lo que da diferente es la parte eléctrica del tensor, para α=0 y β=i=1,2,3.
$F^{0i}=\partial^0 A^i - \partial^i A^0 =$ siendo $\partial^0 = -\partial_0 = -1/c.\partial_t$
$F^{0i} = -1/c.\partial_t A^i - \partial_i A^0$
$F^{0i} = -1/c.\partial_t A^i - \partial_i \Phi/c$ →$F^{0i} = E_i/c$, signo cambiado respecto a la versión anterior $F_{\alpha\beta}$

Esta nueva versión del tensor resulta:
$[\ F^{\alpha\beta}\ ]=$

[00	+Ex/c	+Ey/c	+Ez/c]
[-Ex/c	00	+Bz	-By]
[-Ey/c	-Bz	00	+Bx]
[-Ez/c	+By	-Bx	00]

Curiosidad: Al cambiar de una forma covariante a una contravariante (y al revés también), las componentes magnéticas se mantienen (igual que las espaciales de los cuadrivectores) mientras que las componentes eléctricas alternan signo (como las temporales de los cuadrivectores).
Ejercicio: Demostrar que se cumple $\eta_{\alpha\lambda}.F^{\lambda\mu}.\eta_{\mu\beta} = F_{\alpha\beta}$. Es el resultado de bajar índices en 2 etapas mediante 2 productos matriciales por el tensor métrico, uno para bajar el índice λ y otro para bajar el índice μ.

Ambas versiones del tensor de campo son necesarias, a cada una se le da un uso diferente.
La utilidad inmediata que se le puede extraer a este tensor contravariante es calcular su divergencia $\partial_\alpha F^{\alpha\beta}$.
No podríamos hacerlo para la versión covariante $\partial_\alpha F_{\alpha\beta}$ porque no se emparejarían adecuadamente los índices α una vez abajo y otra vez arriba.

Visualizamos matricialmente la divergencia del tensor tomando divergencia de cada una de sus columnas:

				[00	+Ex/c	+Ey/c	+Ez/c]
				[-Ex/c	00	+Bz	-By]
				[-Ey/c	-Bz	00	+Bx]
				[-Ez/c	+By	-Bx	00]
[1/c.∂t	∂x	∂y	∂z]	[-ρ/(εoc)	-μoJx	-μoJy	-μoJz]

¿Cómo es que aparecen las cargas y corrientes?
Estamos aplicando aquí las ecuaciones de Maxwell.

- Componente-0 = $-(\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z)/c = -(\nabla \cdot \vec{E})/c = -(\rho/\epsilon_o)/c$ por Ley de Gauss-Coulomb
- Componente-1 = $1/c^2.\partial_t E_x + \partial_z B_y - \partial_y B_z$

Por Ley de Ampere, $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0.(\vec{J} + \epsilon_0.\partial_t \vec{E}) = \mu_0.\vec{J} + \mu_0\epsilon_0.\partial_t \vec{E} = \mu_0.\vec{J} + 1/c^2.\partial_t \vec{E}$
Proyectado en la dirección-x el rotor da $\partial_y B_z - \partial_z B_y$, que al sustituir en la divergencia del tensor cancela la parte de corriente de desplazamiento y conserva únicamente la corriente óhmica (con signo cambiado).
El resultado entonces es un cuadrivector $-(\rho/(\epsilon_o c), \mu_o \vec{J})$

Sustituimos $1/(\epsilon_o c)=\mu_o c$

$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_o(\rho c, \vec{J})$ reconocemos el cuadrivector carga-corriente

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_o . J^\beta$$

Esta expresión tensorial junta 2 de las 4 ecuaciones de Maxwell: Gauss-Coulomb + Ampere.

Las otras 2 ecuaciones de Maxwell están implícitas en los potenciales:

- $\vec{B}=\nabla\wedge\vec{A}$. Para que $\vec{B}$ derive de un potencial vectorial su divergencia debe ser nula. Esto está asociado a la Ley de Biot-Savart y a la ausencia de monopolos magnéticos. $\nabla\cdot\vec{B} = 0$
- $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial_t\vec{A}$. Esta otra ecuación está relacionada directamente con la Ley de Faraday. Si $\vec{E}+\partial_t\vec{A}$ deriva de un potencial escalar es porque su rotacional es nulo
  $\nabla\wedge\vec{E} +\partial_t(\nabla\wedge\vec{A})=0$
  $\nabla\wedge\vec{E} +\partial_t\vec{B}=0$

5.6.3 Ecuación de ondas *tensorial*:

Si recurrimos a la definición del tensor $F^{\alpha\beta}= \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$, tenemos:

$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) = \partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta - \partial_\alpha\partial^\beta A^\alpha$ →podemos intercambiar el orden de derivación

$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta\partial_\alpha A^\alpha$ → y reagrupar

$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta\partial_\alpha A^\alpha$ →simplificamos por calibre Lorenz $\partial_\alpha A^\alpha=0$

$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta$

$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta$ →$\partial_\alpha\partial^\alpha=[]^2$ operador de ondas definido en cap.4.5.7

$$[]^2 A^\beta = -\mu_o . J^\beta$$

Esta es la ecuación de ondas con fuentes, en forma cuadrivectorial.

Condensa las 2 conocidas del Electromagnetismo:

Φ vs. ρ $\vec{A}$ vs. $\vec{J}$.

Anteriormente habíamos visto la ecuación de ondas en el vacío.

Ahora el operador d'Alembertiano de los campos no es nulo. Pero sabemos que es invariante frente a transformaciones de Lorentz al pasar a otro referencial Σ'. Lo que asegura que la ecuación de ondas en ese nuevo referencial va a tener exactamente la misma forma tensorial, simplemente refiriendo todo a las nuevas coordenadas.

$$[]^2 A'^\beta = -\mu_o . J'^\beta$$

5.6.4 Transformación tensorial:

Los vectores requieren una multiplicación matricial por el jacobiano de Lorentz para cambiar de referencia entre dos sistemas Σ y Σ'.

Sin embargo, el tensor de campo electromagnético precisa 2 productos matriciales, uno a la izquierda y otro a la derecha. Porque $F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ y se debe convertir $\partial_\alpha \rightarrow \partial X'^\lambda/\partial X^\alpha . \partial'_\lambda$ y $A_\beta \rightarrow \partial X'^\mu/\partial X^\beta . A'_\mu$

Todos los tensores, no solamente el de campo electromagnético, siguen esta misma ley de transformación.

- $T_{\alpha\beta} = \partial X'^\lambda/\partial X^\alpha . \partial X'^\mu/\partial X^\beta . T'_{\lambda\mu}$
- $T^{\alpha\beta} = \partial X^\alpha/\partial X'^\lambda . \partial X^\beta/\partial X'^\mu . T'^{\lambda\mu}$
- ¿Si las varianzas están mezcladas? ¿$T_\alpha{}^\beta$? ¿Y si el rango es mayor a 2?¿$M^\sigma{}_{\alpha\beta}$?

Ejercicio: Demostrar las fórmulas que faltan.

Ejercicio: Aplicar las transformaciones que sean necesarias para expresar las relaciones relativistas entre $\vec{E},\vec{B}$ y $\vec{E'},\vec{B'}$, y comparar con los primeros enfoques semiclásicos de 3.2.2 y con los resultados de 4.3.2.

Podemos enunciar dos resultados importantes y relacionados:

- Todo objeto de 2 índices (α,β) que se transforme siguiendo las leyes recién enunciadas, es un tensor.
- Todo objeto que no se transforme siguiendo estas reglas, no es un buen tensor.

En el capítulo 8 veremos objetos con índices altos y bajos que parecen tensores pero que no siguen este comportamiento deseado de transformación con el doble producto matricial.

Ejemplo de transformación tensorial:
Partimos de la expresión de la fuerza de Lorentz en un sistema Σ, y luego aplicamos transformación de Lorentz para pasar a un referencial Σ' que se mueve respecto a Σ.

$L_\alpha = q.F_{\alpha\beta}.U^\beta$ →sustituimos $U^\beta=\partial X^\beta/\partial X'^\mu.U'^\mu$
$L_\alpha = q.F_{\alpha\beta}.\partial X^\beta/\partial X'^\mu.U'^\mu$
$L_\alpha = q.F_{\alpha\beta}.\partial X^\beta/\partial X'^\mu.U'^\mu$ →multiplicamos por la matriz de Lorentz $\partial X^\alpha/\partial X'^\lambda$
$\partial X^\alpha/\partial X'^\lambda.L_\alpha = q.\partial X^\alpha/\partial X'^\lambda.F_{\alpha\beta}.\partial X^\beta/\partial X'^\mu.U'^\mu$
$\partial X^\alpha/\partial X'^\lambda.L_\alpha = q.\partial X^\alpha/\partial X'^\lambda.F_{\alpha\beta}.\partial X^\beta/\partial X'^\mu.U'^\mu$ →reconocemos la fuerza en Σ'
$L'_\lambda = q.\partial X^\alpha/\partial X'^\lambda.F_{\alpha\beta}.\partial X^\beta/\partial X'^\mu.U'^\mu$
$L'_\lambda = q.\partial X^\alpha/\partial X'^\lambda.F_{\alpha\beta}.\partial X^\beta/\partial X'^\mu.U'^\mu$
$L'_\lambda = q.F'_{\lambda\mu}.U'^\mu$

Queda la misma expresión tensorial en Σ', si se cumple $F'_{\lambda\mu} = \partial X^\alpha/\partial X'^\lambda.F_{\alpha\beta}.\partial X^\beta/\partial X'^\mu$.
Como ayuda para evitar equivocarnos, observemos que los índices que van arriba de la derivada parcial tienen carácter contravariante, y los que van debajo de la derivada tienen carácter covariante.
Toda expresión tensorial válida debe balancear exactamente los índices altos y bajos, a ambos lados del signo de igualdad.

5.6.5 Invariante del tensor de campo:

Nos proponemos calcular la cantidad $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$, que es algo parecido a una norma matricial (norma de un vector era el producto de las versiones covariante y contravariante del vector).
Se trata de un escalar, sin índices en su expresión final, porque se balancean mediante suma ambos índices intermedios bajos y altos. Al ser escalar sin índices bajos ni altos es un invariante.
La operación que permite calcularlo se llama *contracción* y se realiza en 2 pasos:

paso 1: producto matricial → $F_{\alpha\lambda}\,F^{\lambda\beta} = Y_\alpha{}^\beta$ (=tensor auxiliar, cuadrático en los campos)
paso 2: contracción α=β → $Y = Y_\alpha{}^\alpha$ (suma de los elementos de la diagonal)
paso 3: Antisimetría → $F_{\alpha\lambda}\,F^{\lambda\alpha} = -F_{\alpha\lambda}\,F^{\alpha\lambda}$

La doble contracción también podría realizarse en un solo paso y quedaría como una suma de 16 términos. Se calcula en forma muy similar a una suma de 4 términos, prestando atención a que en cada casillero i,j hay que multiplicar el covariante F_{ij} por el contravariante F^{ij}.
Ejercicio: Realizar los cálculos en 1 paso y en 2 pasos, y demostrar que el resultado es $2.[B^2 - E^2/c^2]$

Interpretación: ¿Por qué esta cantidad es invariante?
-Se puede ver fácil en el caso particular de una onda electromagnética que se describe en un referencial Σ en el cual los campos valen E=c.B (invariante nulo Y=0). Al pasar mediante transformación de Lorentz a otro referencial Σ' tendremos una onda electromagnética que cumple E'=c.B', o sea que el invariante en Σ' también es nulo Y'=0.
-En un escenario electrostático con $\vec{B}=0$, puedo hacer aparecer efectos magnéticos si me muevo. Pero como solo puedo moverme a velocidad v<c, siempre se va a mantener $B'^2 - E'^2/c^2<0$ y la configuración seguirá viéndose como más eléctrica que magnética.

5.6.6 Identidad de Bianchi:

La simetría de índices del tensor electromagnético permite establecer identidades basadas en la permutación cíclica de índices, por ejemplo la llamada Identidad de Bianchi: $\partial_\alpha F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\alpha} = 0$

Demostración: Debemos expandir cada derivada de acuerdo a la definición del tensor, y luego operar.

$\partial_\alpha F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\alpha} =$
$\partial_\alpha(\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda) + \partial_\mu(\partial_\alpha A_\lambda - \partial_\lambda A_\alpha) + \partial_\lambda(\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu) =$
$\partial^2_{\alpha\lambda}A_\mu - \partial^2_{\alpha\mu}A_\lambda + \partial^2_{\mu\alpha}A_\lambda - \partial^2_{\mu\lambda}A_\alpha + \partial^2_{\lambda\mu}A_\alpha - \partial^2_{\lambda\alpha}A_\mu =$ →coloreamos
$\partial^2_{\alpha\lambda}A_\mu - \partial^2_{\alpha\mu}A_\lambda + \partial^2_{\mu\alpha}A_\lambda - \partial^2_{\mu\lambda}A_\alpha + \partial^2_{\lambda\mu}A_\alpha - \partial^2_{\lambda\alpha}A_\mu = 0$

Los términos de igual color se cancelan debido a que las derivadas segundas conmutan.

Utilidad: Veremos que esta identidad suministra las 2 ecuaciones de Maxwell que todavía no están incorporadas a las fórmulas tensoriales.

- Caso λ=μ

$\partial_\alpha F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\alpha} =$
$\partial_\alpha F_{\lambda\lambda} + \partial_\lambda F_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda F_{\lambda\alpha} =$ →es nulo por estar en la diagonal
$0 + \partial_\lambda(F_{\alpha\lambda} + F_{\lambda\alpha}) =$ 0 →se cancelan por antisimetría

Obtenemos un 0 trivial, simplemente confirmamos un caso particular de la identidad pero no hay todavía correlación con ninguna ecuación de Maxwell.

- Caso μ=α o α=λ

Es igual al caso anterior debido al intercambio de roles entre los índices
La única combinación no trivial es cuando los 3 índices son diferentes

- Caso α=1, λ=2, μ=3

$\partial_\alpha F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\alpha} =$
$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} =$
$\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z =$
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

→ Aquí aparece la Ley de Biot-Savart que describe la ausencia de monopolos magnéticos

- Otras permutaciones de α≠λ≠μ≠α repiten la misma ley de Biot-Savart.

- Caso α=0, λ=2, μ=3

$\partial_0 F_{23} + \partial_3 F_{02} + \partial_2 F_{30} =$
$1/c.\partial_t B_x + \partial_z(-E_y/c) + \partial_y(E_z/c) =$
$1/c.\ [\ \nabla \wedge \vec{E} + \partial_t \vec{B}\ ]$ proyectado en la dirección x

→ Aquí aparece la Ley de Faraday de inducción electromagnética.

Las restantes combinaciones de índices aportan, o bien un 0 trivial, o bien la Ley de Faraday proyectada sobre otros ejes coordenados 'y', 'z'.

5.6.7 Tensor de campo dual:

Las leyes de Biot-Savart y de Faraday también se expresar tensorialmente definiendo un tensor dual.

$[\ F^{*\alpha\beta}\ ]=$

[00	$+B_x$	$+B_y$	$+B_z$]
$[-B_x/c$	00	$-E_z/c$	$+E_y/c$]
$[-B_y/c$	$+E_z/c$	00	$-E_x/c$]
$[-B_z/c$	$-E_y/c$	$+E_x/c$	00]

La divergencia de la columna-0 del tensor expresa la Ley de Biot-Savart.
La divergencia de las columnas 1,2,3 da las proyecciones x,y,z de la Ley de Faraday.

Curiosidad histórica: La ausencia de monopolos magnéticos o cargas magnéticas despertó la curiosidad de varios científicos desde hace más de un siglo y motivó que muchos pensaran modelos para incorporarlos a las teorías físicas y/o experimentos para detectar su existencia. Si algún día se detectan cargas magnéticas y sus corrientes magnéticas asociadas, la Teoría de la Relatividad deberá contemplarlas como fuentes de divergencia del tensor de campo dual.
Ejercicio: Demostrar que el producto escalar clásico $\vec{E} \cdot \vec{B}$ es un invariante relativista (en particular, es nulo en una onda electromagnética). Sugerencia: Usar fórmulas 4.3.2 o calcular la contracción tensorial $F_{\alpha\beta}.F^{*\alpha\beta}$.

Se puede avanzar mucho más en la Relatividad Especial.
En este trabajo solo nos concentramos en las partes que creemos más necesarias para poder luego continuar con la Gravitación y la Relatividad General a partir del capítulo 6.

Fin de la Primera Parte.

1. SISTEMAS DE REFERENCIA
2. LEYES FÍSICAS
3. RELATIVIDAD ESPECIAL
4. TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ
5. MECÁNICA RELATIVISTA Y ELECTROMAGNETISMO

CONTINUACIÓN→
SEGUNDA PARTE.

6. **RELATIVIDAD GENERAL**
7. **CURVATURA DEL ESPACIO-TIEMPO**
8. **HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS**
9. **FÍSICA EN ESPACIOS CURVOS**

TERCERA PARTE.

10. **TENSOR DE ENERGÍA-IMPULSO**
11. **ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN**
12. **SOLUCIONES EXACTAS**
13. **TEMAS ADICIONALES**
14. **ÍNDICE DE AUTORES Y DICCIONARIO.**
15. **EJERCICIOS RESUELTOS.**
16. ANEXOS
    - 16.1.1 Cálculo numérico, códigos fuente.
    - 16.1.2 Lecturas de interés.
17. BIBLIOGRAFÍA.